Fiche de mécanique des systèmes

I. Généralités

1. $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OM_i}}{m}$
2. $\overrightarrow{p}_R = \sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{v_i} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{p_i}$
3. $\overrightarrow{L}_{O_R} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{L_i}_{O_R} = \sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OM_i} \wedge \overrightarrow{v_i}_R$
4. $E_C = \sum_{i=1}^{N} E_{CiR} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_{iR}^2$

II. Référenciel du centre de masse

1. $\overrightarrow{v_i}_R = \overrightarrow{v_i}^* + \overrightarrow{v}(G)_R$ [1]
2. $\overrightarrow{p}^* = \overrightarrow{0}$
3. Théorèmes de Koenig
   a. $\overrightarrow{p}_R = m\overrightarrow{v}(G)_R$
   b. $\overrightarrow{L}^* = \overrightarrow{L_O}^* = \overrightarrow{L_G}^* = \overrightarrow{L_{GR}} = \sum m_i \overrightarrow{GM_i} \wedge \overrightarrow{v_i}^*$
   $\overrightarrow{L_{OR}} = m\overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{v}(G)_R + \overrightarrow{L}^*$
   c. $E_{CR} = \frac{1}{2} m v(G)_R^2 + E_C{}^*$

III. Théorèmes généraux

1. $\overrightarrow{R}_{\text{int}} = \overrightarrow{0}$ [2]
2. $\overrightarrow{\mathscr{M}}_{O(\text{int})} = \overrightarrow{0}$
3. $\overrightarrow{R}_{\text{ext}} = \left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}_R}{\mathrm{d}t}\right)_R$
4. $\overrightarrow{\mathscr{M}}_{O(\text{ext})} = \left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_{OR}}}{\mathrm{d}t}\right)_R$
5. $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}^*}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathscr{M}}_{G(\text{ext})}$
6. $\mathscr{P}_{R(\text{int})} = F_R \cdot \dot{r}$
7. $\dfrac{\mathrm{d}E_{CR}}{\mathrm{d}t} = \mathscr{P}_{\text{int}} + \mathscr{P}_{R(\text{ext})}$

IV. Collisions de particules

1. Au cours du choc, la quantité de mouvement du système se conserve.
2. Hypothèse élastique unidimentionnel
   a. Elle suppose que l'énergie potentielle interne des particules se conserve au cours du choc et la conservation de l'énergie cinétique du système.
   b. $\overline{u}' = -\overline{u}$
   c. $\overline{v}_1' = \dfrac{(m_1 - m_2)\overline{v_1} + 2m_2\overline{v_2}}{m_1 + m_2}$
   d. $\overline{v}_2' = \dfrac{(m_2 - m_1)\overline{v_2} + 2m_1\overline{v_1}}{m_1 + m_2}$
3. Cas général unidimentionnel
   a. $\overline{u}' = -e\overline{u} \quad e \in [0;1]$
   b. $e = 1$: choc élastique
   c. $e = 0$: choc parfaitement mou (M_1 et M_2 se collent)

V. Le problème à deux corps

a. $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{r} = r\overrightarrow{e_r}$
b. $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}_{1\to 2} = F_R\overrightarrow{e_r}$
c. $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$
d. $\mu \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{F}$
e. L'équation précédente peut s'interpréter comme l'équation du mouvement dans R^* d'une particule fictive M de masse μ et de position $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_1M_2}$ alors

$$\begin{cases} \overrightarrow{r} = \overrightarrow{GM_2} - \overrightarrow{GM_1} = \overrightarrow{GM} \\ m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} = \overrightarrow{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{GM_1} = -\dfrac{m_2}{m_1 + m_2}\overrightarrow{GM} \\ \overrightarrow{GM_2} = +\dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\overrightarrow{GM} \end{cases}$$

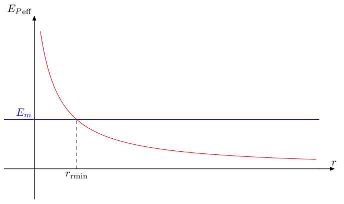
On peut finalement revenir dans R en écrivant $\overrightarrow{OM_i} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM_i}$

f. $\overrightarrow{\mathscr{L}}^* = \mu\overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{v}^*$
g. $E_C{}^* = \frac{1}{2}\mu v^{*2}$
h. Mouvement à force centrale
   a. Mouvement dans le plan contenant G et orthogonal à $\overrightarrow{\mathscr{L}_G}^*(M)$
   b. Loi des aires
      i. $r^2\dot{\theta} = c$
      ii. $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \dfrac{c}{2}$
   c. Cas d'une force conservative : $E_{p_{\text{eff}}}(r) = \frac{1}{2}\mu\frac{c^2}{r^2} + E_p(r)$
   d. $E_{p_{\text{eff}}}(r) \leq E_m$
   e. Formules de Binet
      i. $u = \dfrac{1}{r}$
      ii. $u' = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}$
      iii. $u'' = \dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}$
      iv. $\overrightarrow{v} = -cu'\overrightarrow{e_r} + cu\overrightarrow{e_\theta}$
      v. $\overrightarrow{a}(M)_R = -c^2u^2(u'' + u)\overrightarrow{e_r}$

[1] Résulte de la composition des vitesses
[2] Résulte du principe des interactions

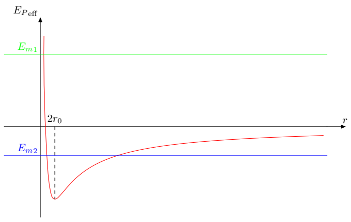
VI. Interaction newtonienne entre deux corps $\overrightarrow{F} = \dfrac{k}{r^2}\overrightarrow{e_r}$

a. Force répulsive ($k > 0$)



Il n'existe alors que des états de diffusion ($r \geq r_{\text{min}}$) et nécessairement $E_m > 0$

b. Force attractive ($k < 0$)



Il existe alors

- des états de diffusion caractérisés par $E_m \geq 0$
- des états liés caractérisés par $E_m < 0$

c. Détermination des trajectoires

i. Méthode de Binet

- Méthode : appliquer le pfd en utilisant la formule de Binet de l'accélération
- Solution : $u(\theta) = -\dfrac{k}{\mu c^2} + A\cos(\theta - \theta_0)$
- Nature des trajectoires :
  - Si $k > 0$, c'est l'équation d'une branche d'hyperbole
  - Dans tous les cas, on a une conique de foyer G, de paramètre $p = \dfrac{\mu c^2}{|k|}$ et d'excentricité $e = \dfrac{A\mu c^2}{|k|}$
- Énergie : on part de $E_m = \dfrac{1}{2}\mu v^2 + \dfrac{k}{r}$ et on remplace v par son expression avec la formule de Binet

ii. Méthode de Runge-Lenz

- Méthode : appliquer le pfd (avec la quantité de mouvement) et multiplier par $C = r^2\dot{\theta}$ puis multiplier vectoriellement par $\vec{e}_z$
- Intégrale première de Runge-Lenz : $\vec{v} \wedge \vec{L} + k\vec{e}_r = \vec{R} = \overrightarrow{\text{cte}}$
- Détermination des trajectoires : remplacer $\vec{v}$ par son expression et $\vec{L} = \mu c\vec{e}_z$ et simplifier. On identifie alors deux expressions de $\vec{R} \cdot \overrightarrow{GM}$ avec $\overrightarrow{GM} = r\vec{e}_r$
- Solution : conique de foyer $p = \dfrac{\mu c^2}{|k|}$ et d'excentricité $e = \dfrac{R}{|k|}$
- Énergie : on élève R au carré, on divise par K^2 et on reconnait.
- Solution : $E_m = \dfrac{|k|}{2}\dfrac{e^2 - 1}{p}$

d. Loi des aires $\begin{cases} S = \pi ab \\ S = \dfrac{c}{2}T \end{cases} \Rightarrow \dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2\mu}{|k|}$

VII. Solide en rotation autour d'un axe fixe

- $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_{\mathscr{S}} \mathrm{d}m \cdot \overrightarrow{OM}$
- $\displaystyle\int_{\mathscr{S}} \mathrm{d}m \cdot \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{0}$
- $\overrightarrow{L_O} = \underbrace{\left(\dot{\theta}\displaystyle\int_{\mathscr{S}} r^2 \mathrm{d}m\right)\vec{e}_z}_{\text{colinéaire à }\Delta} - \underbrace{\dot{\theta}\left(\displaystyle\int_{\mathscr{S}} rz\mathrm{d}m\vec{e}_r\right)}_{\text{orthogonal à }\Delta}$
- $J_\Delta = \displaystyle\int \mathrm{d}m r_\Delta^2$
- Si Δ axe principal d'inertie $\overrightarrow{L_O} = J_\Delta \cdot \overrightarrow{\Omega}$
- Dans tous les cas : $L_\Delta = J_\Delta \cdot \dot{\theta}$
- $\overrightarrow{\mathscr{M}_O} = \displaystyle\int_{\mathscr{S}} \overrightarrow{OM} \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{F}_{\text{ext}}$
- Théorème du moment cinétique : $J_\Delta \cdot \ddot{\theta} = \mathscr{M}_{\Delta\text{ext}}$
- $P_{\text{int}} = 0$
- $P_{\text{ext}} = \mathscr{M}_{\Delta\text{ext}} \cdot \dot{\theta}$
- $E_C = \dfrac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2$