

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Physique**

Présentée par

Julien SALORT

Thèse dirigée par **Philippe-E. ROCHE** et **Bernard HÉBRAL**

préparée au sein de l' **Institut Néel, CNRS/UJF/Grenoble-INP**
et de l' **École Doctorale de Physique**

Turbulence quantique *versus* classique

Thèse soutenue publiquement le **16 novembre 2011**,
devant le jury composé de :

Eberhard BODENSCHATZ Examineur
Max-Planck-Institut für Dynamik und Selbstorganisation (Göttingen)

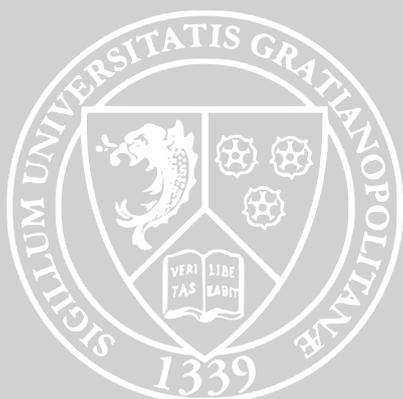
Thierry DOMBRE Président
Laboratoire interdisciplinaire de Physique, UJF/CNRS (Grenoble)

Jean-François PINTON Rapporteur
Laboratoire de Physique, ENS de Lyon/CNRS (Lyon)

Bernard PLAÇAIS Examineur
Laboratoire Pierre Aigrain, CNRS/UPMC/ENS (Paris)

Philippe-E. ROCHE Directeur de thèse
Institut Néel, CNRS/UJF/Grenoble-INP (Grenoble)

Patrick TABELING Rapporteur
Laboratoire Microfluidique, MEMS & Nanostructure, ESPCI/CNRS (Paris)



Remerciements

C'est un grand privilège d'effectuer sa thèse à l'Institut Néel. Je remercie vivement Alain FONTAINE et Alain SCHUHL, directeurs successifs de l'Institut Néel ainsi qu'André SULPICE puis Pierre-Étienne WOLF, directeurs du département MCBT, de m'avoir accueilli dans leur laboratoire.

Je remercie le jury d'avoir accepté d'évaluer mon travail de thèse, notamment les rapporteurs, Jean-François PINTON et Patrick TABELING qui ont relu mon manuscrit.

Je tiens à remercier Philippe-E. ROCHE pour son encadrement dynamique pendant ces trois années. Les ingénieurs et techniciens des différents services du laboratoire, dont les compétences et la disponibilité sont inestimables, permettent aux équipes de mener à bien leurs projets de recherche. Je pense notamment à Grégory GARDE qui a pris en charge la conception mécanique, la réalisation, l'assemblage de la tripe de l'expérience Toupie, et qui a été également présent pendant les premiers refroidissements, mais aussi à ceux qui sont toujours aimablement disponibles pour rendre service ou prodiguer des conseils, notamment Emmanuel ANDRÉ, Pierre BROSSE-MARON, Pierre CHANTHIB, Guillaume DONNIER-VALENTIN, Olivier EXSHAW, Anne GÉRARDIN, Christophe GUTTIN, Christophe HOARAU, Philippe JEANTET, Yannick LAUNAY, Henri RODENAS, Vincent ROGER, et beaucoup d'autres.

Je remercie aussi nos collaborateurs des projets TSF et SHREK qui m'ont permis de découvrir d'autres façons de travailler, tout d'abord Alain GIRARD et Jean-Marc PONCET qui ont accepté ma présence dans leurs installations au SBT/CEA Grenoble, ainsi que Bernard ROUSSET, toujours très dynamique et efficace, Pantxo DIRIBARNE et Davide DURÍ avec lesquels il est particulièrement agréable de discuter, et bien sûr Michel BON-MARDION et Philippe CHARVIN.

Un grand merci également à Christophe BAUDET, Bernard CASTAING, Laurent CHEVILLARD, François DAVIAUD, Bérengère DUBRULLE et Yves GAGNE pour les multiples discussions passionnantes sur la turbulence, toujours prêts à discuter malgré la naïveté dont j'ai pu parfois faire preuve ; et bien sûr je remercie Emmanuel LÉVÊQUE avec lequel l'équipe collabore pour les simulations numériques et avec qui il est très agréable de travailler.

J'ai une pensée particulière pour les personnes qui m'ont formé puis assisté en salle blanche. Tout d'abord Alessandro MONFARDINI, qui m'a encadré pendant toute la phase de conception du capteur mais aussi le personnel de Nanofab, Thierry CROZES, Sébastien DUFRESNES, Bruno FERNANDEZ, Thierry FOURNIER et Gwenaëlle JULIE et aussi le personnel de la PTA, notamment Stéphane LITAUDON, très patient malgré les incidents dans la DRIE, Frédéric GUSTAVO, toujours disponible lorsque la Nordiko faisait des caprices, mais aussi Helge HAAS, Thibault HACCART, Christophe LEMONIAS et Jean-Luc THOMASSIN, que j'ai fréquemment sollicités pour des discussions techniques.

Enfin, je suis reconnaissant envers les autres membres du laboratoire pour leur bienveillance et les nombreuses discussions intéressantes, ainsi que les conseils techniques, notamment les membres du groupe d'hydrodynamique cryogénique, étudiants et permanents, Hichem BENALIA, Benoît CHABAUD, Frédéric GAUTHIER, Bernard HÉBRAL, Robert KAISER, Esteban LESAGE et Elie THIERY mais aussi d'autres groupes comme Geoffroy AUBRY, Alain BENOIT, Vincent BOUCHIAT, Jacques BOSSY, Philippe CAMUS, Olivier BUISSON, Eddy COLLIN, Henri GODFRIN, Sylvain HERMELIN, Christian HOFFMANN, Pierre HUNGER, Panayotis SPATHIS, Ahmad SULTAN et Christophe THIRION.

Je remercie Jean-François PINTON et Thierry DAUXOIS d'avoir accepté de m'accueillir à partir de septembre 2011 au Laboratoire de Physique à l'École Normale Supérieure de Lyon en tant qu'agrégé préparateur, ainsi que Francesca CHILLÀ et Bernard CASTAING qui m'intègrent à leur équipe pour mes futurs travaux post-doctoraux.

Table des matières

Introduction	xi
1 Hydrodynamique classique et quantique	1
1.1 Turbulence classique	1
1.1.1 Cascade de Richardson et théorie de Kolmogorov	3
1.1.2 Vérifications expérimentales	6
1.1.3 Au delà de Kolmogorov 1941	8
1.2 Hydrodynamique de l'hélium	11
1.2.1 L'hélium cryogénique comme fluide modèle classique	11
1.2.2 Propriétés exotiques à basse température : He I et He II	11
1.2.3 Premier et second sons de l'He II	14
1.3 Turbulence quantique	15
1.3.1 Nombre de Reynolds	15
1.3.2 Enchevêtrement de vortex	16
1.3.3 Écoulements turbulents	17
2 Développement de micro-capteurs de vitesse	23
2.1 Enjeux des mesures locales de vitesse	23
2.2 Vers les plus petits tubes de Pitot	23
2.2.1 Principe d'un capteur à pression de stagnation	23
2.2.2 Mise en œuvre expérimentale	25
2.2.3 Sensibilité aux perturbations acoustiques	28
2.2.4 Limites de miniaturisation	30
2.3 Anémomètre à micro-poutrelle	30
2.3.1 Principe	30
2.3.2 Conception du capteur	31
2.3.3 Déflexion de la micro-poutrelle	31
2.3.4 Le premier prototype	42
2.3.5 Perspectives	49
3 Spectres de vitesse	51
3.1 Introduction et motivations	51
3.2 Écoulement de grille	52
3.2.1 Expérience « TSF »	52
3.2.2 Analyse quantitative des mesures de grille	56
3.3 Sillage proche	60
3.4 Expérience « Toupie »	62
3.4.1 Conception de l'expérience	62
3.4.2 Mesures de vitesse	64
3.5 Comportement spectral à petite échelle	65
3.5.1 Modèle numérique	66

3.5.2	Spectre de vitesse	67
4	Cascade d'énergie et intermittence	69
4.1	Mise en évidence	69
4.1.1	Expérience Toupie	69
4.1.2	Simulations numériques	71
4.2	Écart à la loi des 4/5	71
4.2.1	Viscosité effective dans la cascade	71
4.2.2	Discussion	73
4.3	Auto-similarité et intermittence	74
4.4	Conclusion	76
5	Fluctuations de vorticité	77
5.1	Motivation physique	77
5.2	Mesures de vorticité en soufflerie	78
5.2.1	Technique de mesure	78
5.2.2	Dispositif expérimental	79
5.2.3	Densité moyenne de lignes de vortex	82
5.3	Spectres de vorticité	83
5.3.1	Mesures expérimentales	83
5.3.2	Simulations numériques	84
5.3.3	Conclusion	86
	Conclusion	87
	Bibliographie	89
	Annexe : pince à second son et contre-courant	97
1	Calcul de l'onde de température dans une cavité	97
2	Caractérisation du dépôt thermométrique de l'IEF	99
3	Assemblage de la pince et technique de mesure	99
4	Écoulement de contre-courant	101
4.1	Motivation et ordre de grandeur	101
4.2	Expérience exploratoire	101

Table des figures

1.1	Étude sur les « turbulences » par Léonard de Vinci	2
1.2	Cascade inertielle de Richardson (1922).	3
1.3	Schéma de la turbulence gelée	4
1.4	Exemple d'un signal de fluctuation en turbulence	4
1.5	Définition de l'incrément de vitesse $\delta v(x)$	5
1.6	Spectres de GReC	7
1.7	Histogramme des incréments de vitesse	8
1.8	Skewness pour différentes expériences	9
1.9	Incréments non gaussiens	9
1.10	Exposant des fonctions de structure	10
1.11	Diagramme de phase de l'hélium	12
1.12	Effet fontaine et effet Onnes	13
1.13	Proportion relative des composantes normale et superfluide	14
1.14	Enchevêtrement de lignes de vortex quantiques	16
1.15	Schéma d'une expérience de contre-courant	18
1.16	Visualisation entre contre-courant	20
1.17	Spectres de vitesse de Maurer & Tabeling	21
2.1	Schéma d'un capteur à pression de stagnation avec les différentes contraintes.	26
2.2	Principaux capteurs à pression de stagnation	27
2.3	Électronique des capteurs à pression de stagnation	28
2.4	Spectre de puissance obtenu avec le capteur ① dans la conduite « Toupie »	29
2.5	Battement du pic parasite dans Toupie	29
2.6	Schéma de principe du capteur à micro-poutrelle	31
2.7	Plan d'ensemble du capteur à micro-poutrelle sur son support	32
2.8	Motif de la couche de niobium.	32
2.9	Coefficient de traînée	33
2.10	Schéma électrique équivalent du résonateur RF	34
2.11	Simulation préliminaire de la géométrie du circuit RF réalisée avec le logiciel « Sonnet ».	35
2.12	Transmission RF avec un circuit Nb (PTA)	36
2.13	Schéma de la galette dans la machine de gravure profonde.	37
2.14	Méthode de contrôle de l'épaisseur	38
2.15	Masques pour la fabrication de la micro-poutrelle	38
2.16	Images de micro-poutrelles	43
2.17	Deux capteurs à micro-poutrelle montés sur la bague d'instrumentation	44
2.18	Circuit électronique RF (directe)	44
2.19	Transmission RF sur le capteur à micro-poutrelle	45
2.20	Analyse EDS-X de la micro-poutrelle	46
2.21	Spectre du signal de micro-poutrelle (électronique directe)	46
2.22	Simulation par éléments finis de la micro-poutrelle réalisés par le SERAS	47

Table des figures

2.23	Circuit électronique RF (FM)	48
2.24	Spectre du capteur à micro-poutrelle (FM)	48
3.1	Image d'un écoulement de grille	52
3.2	Schéma du circulateur TSF	53
3.3	Zone de mesure de TSF	54
3.4	Schéma de la grille de TSF	54
3.5	Configurations de l'écoulement TSF	55
3.6	Spectre de vitesse en écoulement de grille (TSF)	56
3.7	Estimation de ϵ dans TSF	58
3.8	Taux de turbulence dans TSF	59
3.9	Spectre dans TSF (Grille)	60
3.10	Spectre dans TSF (sillage)	61
3.11	Schéma de l'expérience « Toupie »	63
3.12	Pompe centrifuge optimisée pour l'expérience Toupie	64
3.13	Spectre de vitesse de Toupie	65
3.14	Instantané de la simulation	66
3.15	Spectre des simulations numériques	68
4.1	Histogrammes de vitesse et d'incrément	70
4.2	Fonction de structure d'ordre 3 et Skewness	70
4.3	Loi des 4/5	72
4.4	Viscosité effective (simulations)	73
4.5	Exposant des fonction de structure	75
5.1	Photos de la pince à second son	79
5.2	Schéma du mini-circulateur	80
5.3	Électronique de mesure de la pince à second son	81
5.4	Espacement inter-vortex en fonction du Reynolds	82
5.5	Spectres expérimentaux de vortacité	83
5.6	Simulation des spectres de vortacité	85
7	Schéma du mode fondamental dans la cavité	97
8	Modèle analytique pour l'onde de second son dans une cavité	99
9	Dépendance en température du dépôt thermométrique d'or-étain	100
10	Réponse fréquentielle de la pince à second son	102
11	Facteur de qualité et fréquences de résonance de la pince à second son	103
12	Schéma de la conduite de contre-courant	104
13	Résonances en présence de contre-courant (grande conduite)	105
14	Schéma de la conduite intermédiaire de contre-courant	106
15	Densité de lignes de vortex	106
16	Électronique de mesure de fluctuations bas bruit de la pince à second son	107

Liste des tableaux

1.1	Viscosité cinématique de quelques fluides	11
1.2	Vitesse du second son	15
2.1	Poids des contributions dans le signal d'un micro-Pitot	25
2.2	Principales caractéristiques des différents capteurs à stagnation de pression	27
3.1	Cotes de la soufflerie « TSF »	55
3.2	Échelle intégrale dans TSF	58
3.3	Propriétés des différentes simulations	67
1	Estimation de la fréquence de résonance de la pince	100
2	Nombres de Reynolds typiques pour l'expérience « grande conduite »	104

Introduction

Turbulence classique et turbulence quantique

À basse température mais au dessus de $T_\lambda \approx 2,17\text{K}$ (à la pression de vapeur saturante), la phase liquide de ^4He constitue un fluide classique appelé He I. Son comportement hydrodynamique est semblable à celui de l'air ou de l'eau. Le comportement hydrodynamique d'un tel fluide lorsqu'il est fortement brassé (écoulement de l'air autour d'une voiture, de l'eau autour d'un nageur, ...) est appelé « turbulence ». Ce type de système, non linéaire et chaotique, constitue un problème physique toujours ouvert.

Pour expliquer le comportement de ce type de système, un premier modèle a été proposé par Richardson dans les années 1920 : le brassage du fluide produit de l'énergie cinétique à grande échelle (sous la forme de grands tourbillons). La non-linéarité conduit ces grands tourbillons à s'étirer et se fractionner en structures plus petites, qui vont elles-mêmes donner naissance à des structures encore plus petites. L'énergie subit ainsi une « cascade » des grandes vers les petites échelles. Cette cascade s'arrête lorsque les tourbillons sont tellement petits qu'ils finissent par être dissipés en chaleur par la viscosité.

Pour valider ce modèle, il est nécessaire d'en déduire des prédictions quantitatives mesurables, par exemple des propriétés statistiques pour les fluctuations locales de vitesse. Kolmogorov a prédit en 1941 que la hiérarchie d'échelle proposée par Richardson conduit à ce la dépendance du spectre de vitesse, $P(f)$, avec la fréquence f , se comporte comme une loi d'échelle en $f^{-5/3}$ et l'existence d'une cascade conduit à une dissymétrie des incréments de vitesse, $\delta v(x; r) = v(x+r) - v(x)$, où $v(x)$ est la vitesse à la position x et $v(x+r)$ la vitesse à une position $x+r$. La prédiction quantitative de cette dissymétrie est appelée « loi des 4/5 ». Ces prédictions ont été vérifiées expérimentalement dans de nombreux écoulements.

Lorsque ^4He est refroidi en dessous de T_λ , il subit une transition de phase. La nouvelle phase, appelée He II, ou parfois « superfluide », a un comportement exotique d'origine quantique. Lorsque l'He II est fortement brassé, cela produit un enchevêtrement (ou pelote) de lignes de tourbillons quantiques. Ce type d'écoulement est appelé « turbulence quantique » ou « turbulence superfluide ». Une question ouverte consiste à savoir comment cette turbulence se compare à la turbulence des fluides classiques, et notamment s'il existe une hiérarchie d'échelles et une cascade d'énergie similaire à celle proposée par Richardson pour les fluides classiques.

Plusieurs mesures expérimentales ont montré des similarités entre la turbulence quantique et la turbulence classique (perte de charge, traînée) et quelques différences (spectre de vorticité). En 1998, Maurer & Tabeling ont réalisé la première mesure locale de fluctuations de vitesse. Elle a montré que le spectre de vitesse d'un écoulement d'He II turbulent pouvait être compatible avec la prédiction classique de Kolmogorov en $f^{-5/3}$.

Résumé du travail de thèse

Le but de cette thèse est d'étudier la turbulence intense de l'He II à température finie ($1\text{K} < T < T_\lambda$). Une question ouverte importante consiste à savoir quelles sont les similarités et différences entre la turbulence classique et la turbulence superfluide. Dans l'état actuel des connaissances sur cette plage de température, on pense que l'essentiel de l'énergie cinétique est distribué entre l'échelle de forçage mécanique (par exemple de l'ordre du cm) et l'échelle associée à la distance moyenne entre les lignes

de vortex quantiques (par exemple de l'ordre du μm). Il peut exister des excitations à des échelles plus petites mais elles sont généralement fortement atténuées aux températures considérées. Aux échelles plus grandes que la distance inter-vortex, les détails des vortex individuels peuvent être ignorés si l'on s'intéresse à la cascade turbulente (description *continue*) et la turbulence superfluide peut être étudiée à l'aide des mêmes outils statistiques que la turbulence classique.

Ce travail de thèse est un travail essentiellement expérimental. L'objectif est de réaliser des mesures locales de fluctuations (essentiellement vitesse mais aussi température et vorticité) dans des écoulements variés afin d'en déduire des propriétés statistiques (spectre, fonctions de structure). Cette approche est inspirée des nombreux travaux, très fructueux, qui ont été menés pendant toute la deuxième moitié du xx^{e} siècle en turbulence classique.

J'ai tout d'abord travaillé à la conception et à la réalisation de capteurs locaux compatibles avec les conditions cryogéniques au sein d'un écoulement d'hélium liquide ($T < 4,2\text{K}$) : ceci impliquait la mise au point de tubes de Pitot miniatures et la réalisation d'un nouveau capteur entièrement micro-fabriqués basé sur la mesure de la déflexion d'une micro-poutrelle placée au cœur de l'écoulement. Le premier prototype, réalisé en fin de thèse, a permis de valider son fonctionnement en écoulement turbulent. Les autres mesures locales de vitesse ont été réalisées avec les tubes de Pitot miniatures.

Ces capteurs ont été insérés dans des écoulements dédiés, notamment un écoulement de grille atteignant un nombre de Reynolds basé sur l'échelle de Taylor $R_\lambda \approx 250$, réalisé dans les installations de grande puissance au SBT/CEA Grenoble (400 W à 1,8 K), dans le cadre d'une collaboration nationale (TSF) impliquant le CNRS, l'ENS Lyon, l'UJF, l'INP-Grenoble et le CEA (Grenoble et Saclay), et plusieurs écoulements dans des souffleries dédiées à l'Institut Néel, dont certaines ont été mises en œuvre pour la première fois dans le cadre de cette thèse. Ces mesures ont permis, en particulier, la première confirmation du résultat de Maurer & Tabeling : un spectre en $f^{-5/3}$ pour la vitesse dans l'hélium superfluide (dans une cellule von Kármán). Nous avons étendu ce résultat à plusieurs géométries, notamment l'écoulement de grille pour lequel nous avons pu comparer d'autres grandeurs à leurs valeurs classiques (taux de turbulence, taux de dissipation d'énergie, constante de Kolmogorov) [Sal10]. Une seconde campagne d'expérience a permis de vérifier pour la première fois la loi des 4/5 dans l'hélium superfluide [Sal12].

J'ai également participé aux traitements de données issues d'une simulation numérique directe du modèle continu à deux fluides de l'hélium superfluide, dans le cadre d'une collaboration avec Emmanuel Lévêque. Ces traitements ont permis de mettre en évidence une physique nouvelle aux échelles dissipatives [SRL11], confirmé la validité de la loi des 4/5 en superfluide et montré l'émergence d'une viscosité effective dans la cascade turbulente héritée de la composante normale [Sal12].

Organisation du manuscrit

- Le chapitre 1 présente quelques généralités sur la turbulence dans les fluides classiques puis sur l'hydrodynamique de l'hélium et la turbulence quantique ;
- Le chapitre 2 présente les développements de micro-capteurs de vitesse : (i) des tubes de Pitot miniatures (le but était de pousser au maximum la miniaturisation) et (ii) un capteur original, entièrement micro-fabriqués en salle blanche dans le cadre de cette thèse, basé sur la déflexion d'une micro-poutrelle ;
- Les chapitres 3 et 4 présentent les résultats obtenus avec les tubes de Pitot miniatures dans les écoulements dits de « co-courant » (respectivement sur le spectre de vitesse et sur les fonctions de structure). Dans ce type d'écoulement, le fluide est mis en mouvement par action mécanique (pompe centrifuge, pales). La turbulence qui en résulte est très intense et a permis d'obtenir des statistiques (spectres, incréments, fonctions de structure) ;
- Enfin, le chapitre 5 présente des mesures de densité locale de lignes de tourbillons, en particulier

des mesures spectrales en soufflerie.

1 Hydrodynamique classique et quantique

Sommaire

1.1	Turbulence classique	1
1.1.1	Cascade de Richardson et théorie de Kolmogorov	3
1.1.2	Vérifications expérimentales	6
1.1.3	Au delà de Kolmogorov 1941	8
1.2	Hydrodynamique de l'hélium	11
1.2.1	L'hélium cryogénique comme fluide modèle classique	11
1.2.2	Propriétés exotiques à basse température : He I et He II	11
1.2.3	Premier et second sons de l'He II	14
1.3	Turbulence quantique	15
1.3.1	Nombre de Reynolds	15
1.3.2	Enchevêtrement de vortex	16
1.3.3	Écoulements turbulents	17

1.1 Turbulence classique

La turbulence classique décrit le comportement d'un fluide (eau, air, ...) fortement brassé. Le mouvement obtenu peut sembler à la fois désordonné (vitesses aléatoires, non reproductibilité) et structuré (tourbillons, structures cohérentes). C'est un domaine qui intrigue les scientifiques depuis plusieurs siècles. La première étude systématique de ce problème a été publiée par Léonard de Vinci au début du xvi^e siècle (figure 1.1).

L'équation qui gouverne la dynamique d'un fluide non visqueux a été établie par Leonhard Euler en 1755 avec un modèle de milieu continu :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = \rho \vec{g} - \nabla p \quad (1.1)$$

où ρ est la densité du fluide, $p(\vec{r}, t)$ est le champ de pression dans le fluide, $\vec{v}(\vec{r}, t)$ est le champ de vitesse du fluide et \vec{g} est l'accélération de la pesanteur. Il s'agit d'une équation différentielle non linéaire. C'est le terme non linéaire, $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$ qui est à l'origine de la richesse de comportement des fluides fortement brassés.

Ce n'est cependant qu'au xix^e siècle que Claude Navier et George Stokes ont établi l'équation qui prévaut toujours aujourd'hui et qui tient compte des frottements visqueux dans le fluide :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = \rho \vec{g} - \nabla p + \eta \nabla^2 \vec{v} \quad (1.2)$$

où η est la viscosité dynamique du fluide. Cette équation de Navier-Stokes est une équation différentielle non-linéaire dont la résolution constitue un problème mathématique très difficile. Il s'agit de l'un des sept défis mathématiques relevant du prix du millénaire¹ : une récompense d'un million de dollars est

1. http://www.claymath.org/millennium/Navier-Stokes_Equations



Fig 1.1 – Étude sur les « turbulences » par Léonard de Vinci.

promise à quiconque parviendra à trouver une solution exacte, ou même seulement à prouver l'existence ou l'inexistence de solutions exactes.

L'écoulement est « turbulent » lorsque le terme non-linéaire domine sur le terme visqueux. On peut caractériser l'ordre de grandeur relatif de ces deux termes avec le nombre de Reynolds, Re :

$$Re = \frac{\text{Terme non-linéaire}}{\text{Terme visqueux}} = \frac{\rho L_0 v}{\eta} = \frac{L_0 v}{\nu} \quad (1.3)$$

où L_0 est l'échelle caractéristique à laquelle l'écoulement est généré, v est la vitesse typique de l'écoulement, $\nu = \eta/\rho$ est la viscosité cinématique.

L'écoulement est « turbulent » lorsque le nombre de Reynolds est grand ($Re \gg 1$). Dans le cas contraire ($Re \ll 1$), on dit que l'écoulement est laminaire. Dans la vie courante, la plupart des écoulements sont turbulents : écoulement de l'air autour d'une voiture ou d'un avion, mouvement de l'eau autour d'un nageur, écoulement d'un cours d'eau,... C'est pour cette raison que l'étude de la turbulence, outre son intérêt fondamental comme système non-linéaire, est d'une grande importance pratique (industrie aéronautique, automobile, nucléaire,...). De nombreuses études, menées au xx^e siècle, ont permis de dégager une description théorique et statistique de la turbulence. Par ailleurs, il n'existe pas de solution exacte connue pour l'équation de Navier-Stokes et la turbulence reste un domaine de recherche toujours ouvert.

Il est également possible de définir un nombre de Reynolds basé sur une échelle microscopique plutôt que sur la grande échelle L_0 . Geoffrey Ingram Taylor a proposé en 1938 de définir une micro-échelle de la turbulence, λ , qui est associée aux gradients de la vitesse turbulente [Tay38], c'est-à-dire,

$$\langle \|\nabla v\|^2 \rangle = \left(\frac{v_{\text{rms}}}{\lambda} \right)^2 \quad (1.4)$$

où $\|\nabla v\|$ représente le module du gradient de vitesse turbulente. Cette échelle conduit à la définition du nombre sans dimension,

$$R_\lambda = \frac{v_{\text{rms}} \lambda}{\nu} \quad (1.5)$$

appelé nombre de Reynolds basé sur la micro-échelle de Taylor. Il permet de quantifier la prépondérance *locale* des effets turbulents par rapport aux effets visqueux. On peut montrer pour un écoulement homogène et isotrope que ce nombre Reynolds turbulent R_λ est relié au nombre de Reynolds Re par la relation,

$$R_\lambda = \sqrt{\frac{20}{3}} Re \quad (1.6)$$

1.1.1 Cascade de Richardson et théorie de Kolmogorov

La première description « moderne » de la turbulence a été proposée par Lewis Fry Richardson en 1922. Il l'a résumée avec ces quelques vers,

« *Big whirls have little whirls,
That feed on their velocity;
And little whirls have lesser whirls,
And so on to viscosity.* »

L'énergie est injectée à grande échelle. Elle apparaît sous la forme d'une grande structure (tourbillon) de taille L_0 . À cette échelle, le nombre de Reynolds $Re_{L_0} = L_0 v_{L_0} / \nu$ est très grand donc la dynamique est dominée par la non-linéarité de l'équation de Navier-Stokes. Elle conduit à ce que la grande structure donne naissance à des structures plus petites. Ces structures plus petites donnent naissance à leur tour à des structures encore plus petites, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on atteigne une petite échelle ℓ , à laquelle on peut associer un nombre de Reynolds $Re_\ell = \ell v_\ell / \nu$ suffisamment faible pour que le terme visqueux devienne significatif et que l'énergie cinétique puisse être dissipée (voir figure 1.2).

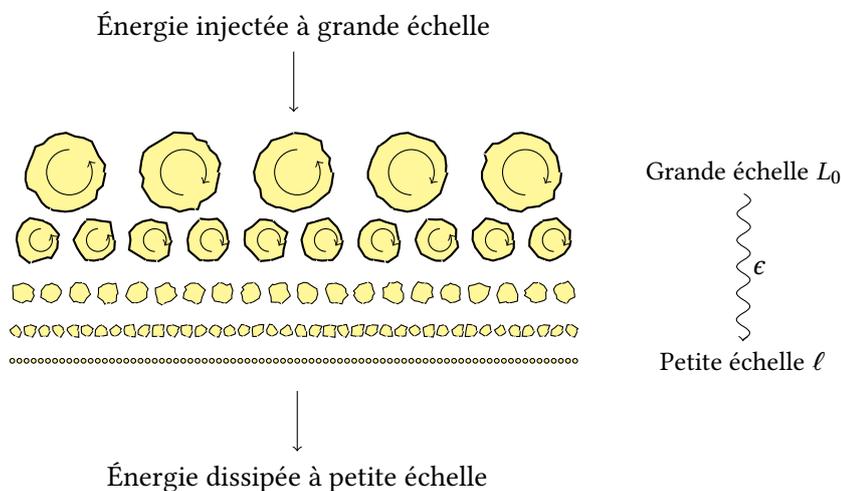


Fig 1.2 – Cascade inertielle de Richardson (1922).

Les échelles à travers lesquelles l'énergie cascade sont appelées « échelles inertielles ». Dans la suite, on note ϵ le flux massique d'énergie qui se propage à travers les échelles inertielles.

Une question importante est de savoir comment vérifier si ce modèle est correct à partir des grandeurs mesurables. Dans la pratique, à défaut d'être capable de mesurer directement ϵ , on peut mesurer une

grandeur locale (notamment, la vitesse, à l'aide d'un anémomètre), et obtenir un signal temporel $v(t)$: Comment se traduit l'existence de la cascade d'énergie sur la nature du signal $v(t)$?

Lorsqu'une grosse structure est advectée à la vitesse $\langle v \rangle$ de l'écoulement moyen, elle va avoir un temps de vol sur le capteur qui sera plus long que celui d'une petite structure. Plus précisément, à une fluctuation de vitesse de fréquence f , peut être associé un tourbillon de taille $\langle v \rangle / f$ (voir figure 1.3). Cette description d'une turbulence *gelée* qui « passe sur » le capteur à la vitesse de l'écoulement moyen a été proposée par Geoffrey Ingram Taylor en 1938 [Tay38].

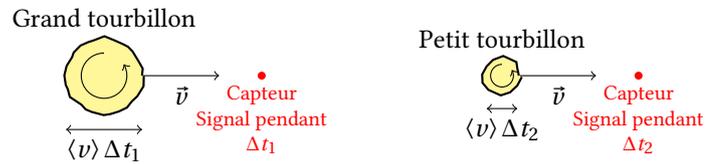


Fig 1.3 – Schéma d'un tourbillon, advecté par l'écoulement moyen, qui passe sur un capteur local. Le temps de vol Δt du tourbillon sur le capteur est donné par sa taille et la vitesse moyenne de l'écoulement, ce qui conduit à une oscillation de fréquence typique $1/\Delta t$ dans le signal mesuré.

Par conséquent, l'analyse spectrale du signal permet d'obtenir des renseignements sur la distribution d'énergie à travers les échelles (figure 1.4).

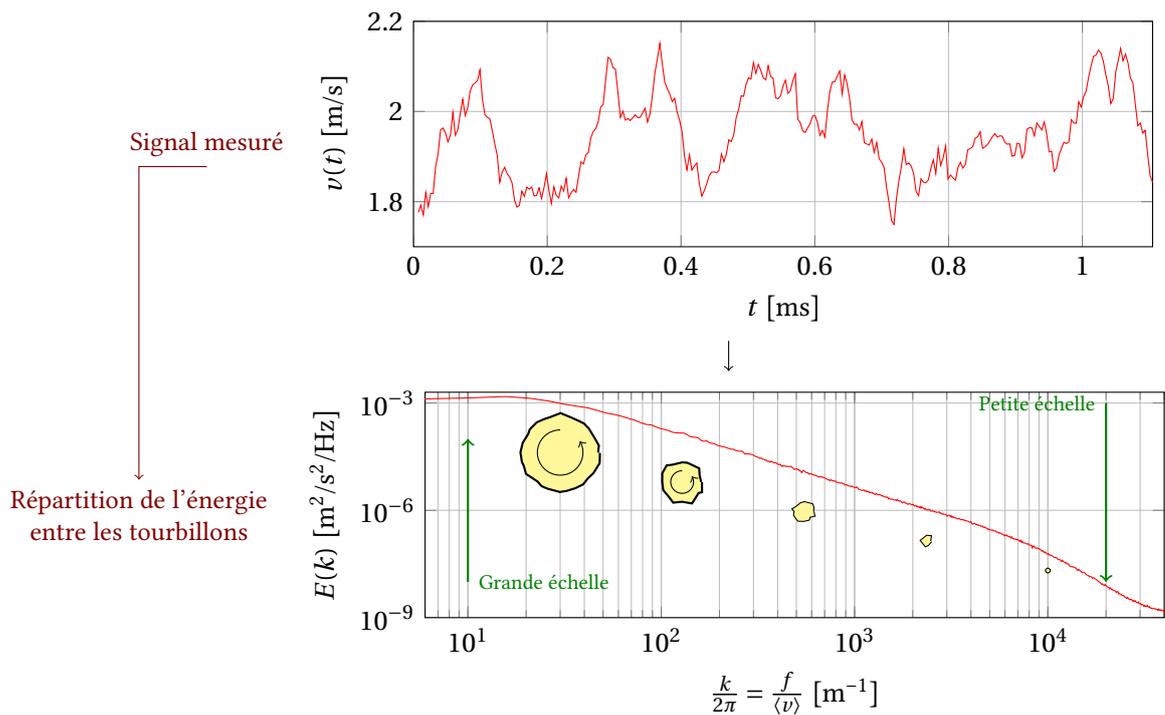


Fig 1.4 – Exemple de signal de vitesse local obtenu dans un écoulement turbulent (ici un jet d'hélium gazeux [Cha00]) et son analyse spectrale (densité spectrale de puissance).

La prédiction quantitative sur la forme attendue de la répartition de l'énergie (plus précisément de la densité spectrale de puissance), illustrée sur la figure 1.4, calculée à partir d'une mesure locale de vitesse,

a été proposée par Andreï Nikolaïevitch Kolmogorov en 1941 [Kol41]. La démonstration est basée sur un principe de conservation de l'énergie à travers les échelles. Le résultat est une loi de puissance (ce qui traduit une invariance d'échelle dans les échelles inertielles) :

$$E(k) = C_k \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (1.7)$$

où k est un vecteur d'onde ($\frac{k}{2\pi} = \frac{f}{\langle v \rangle}$ dans le cadre de l'hypothèse de Taylor de turbulence gelée), ϵ est le flux massique d'énergie à travers les échelles et C_k est une constante. Cependant, cette prédiction ne traduit pas le sens de propagation de l'énergie à travers les échelles (des grandes vers les petites) : si on inversait le sens du temps pour le signal $v(t)$, on obtiendrait la même densité spectrale de puissance.

Pour aller plus loin, on peut introduire une autre quantité statistique : les fonctions de structure des incréments de vitesse. L'incrément de vitesse $\delta v(r; x)$, illustré sur la figure 1.5, est défini comme :

$$\delta v(r; x) = v(x+r) - v(x) \quad (1.8)$$

où $v(x)$ est le signal spatial de vitesse, obtenu à partir de $v(t)$ à l'aide de l'hypothèse de turbulence gelée.

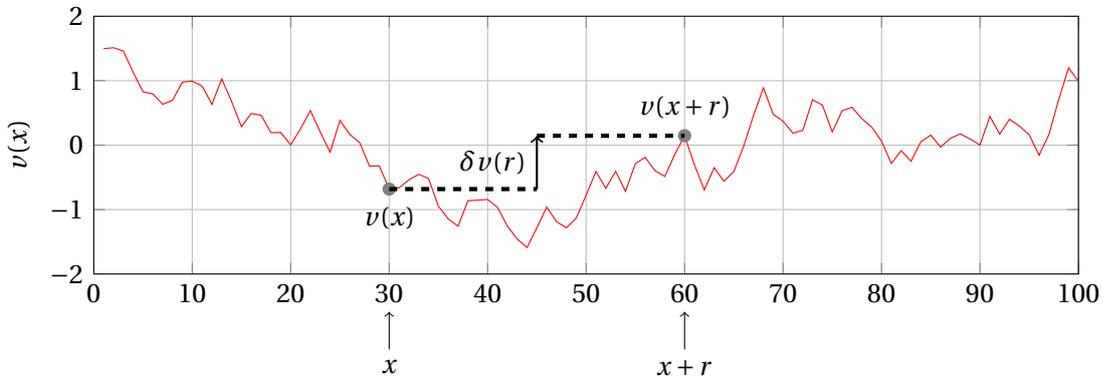
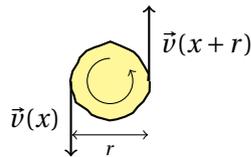


Fig 1.5 – Définition de l'incrément de vitesse $\delta v(x)$

Physiquement, dans le cas d'un écoulement turbulent homogène et isotrope, on peut considérer que $\delta v(r; x)$ caractérise un tourbillon de taille r situé en x :



et donc $\sqrt{\langle \delta v(r; x)^2 \rangle}$ est la vitesse typique des tourbillons de taille r ($\langle \cdot \rangle$ représente la moyenne suivant x). Dans la suite, on omet la dépendance explicite en x .

Considérons un tourbillon de taille r et de vitesse typique $\delta v(r)$. Il s'agit d'une structure *instable*. On peut alors supposer que son temps de vie correspond typiquement au temps de retournement, $r/\sqrt{\langle \delta v(r)^2 \rangle}$. On peut donc en déduire un ordre de grandeur attendu pour le taux d'énergie à travers les échelles, ϵ :

$$\epsilon = \frac{\text{Énergie cinétique massique}}{\text{Temps de retournement}} \approx \frac{\langle \delta v(r)^2 \rangle}{r/\sqrt{\langle \delta v(r)^2 \rangle}} \approx \frac{\langle \delta v(r)^2 \rangle^{3/2}}{r} \quad (1.9)$$

On obtient donc la relation :

$$\langle \delta v(r)^2 \rangle \sim (\epsilon r)^{2/3} \quad (1.10)$$

La transformée de Fourier de l'équation 1.10 permet de retrouver la dépendance en $k^{-5/3}$ de la théorie de Kolmogorov.

De façon générale, on appelle fonction de structure d'ordre n la fonction $SF_n(r)$ définie comme :

$$SF_n(r) = \langle \delta v(r)^n \rangle \quad (1.11)$$

La théorie de Kolmogorov 1941 permet de prédire une expression générale de la même forme que l'équation 1.10 :

$$\langle \delta v(r)^n \rangle \sim r^{n/3} \quad (1.12)$$

En particulier, un calcul exact basé sur un bilan échelle par échelle, permet d'obtenir une relation entre la fonction de structure d'ordre 3, et le taux d'énergie ϵ à travers les échelles :

$$\langle \delta v(r)^3 \rangle = -\frac{4}{5}\epsilon r \quad (1.13)$$

La fonction de structure d'ordre 3 caractérise la dissymétrie de la distribution de $\delta v(r)$. En effet, si la distribution était symétrique, c'est-à-dire $p(\delta v(r)) = p(-\delta v(r))$, les moments d'ordre impair seraient nuls. On peut introduire une grandeur non dimensionnée pour caractériser la dissymétrie, appelée *skewness* de la distribution et notée $S(r)$:

$$S(r) = \frac{\langle \delta v(r)^3 \rangle}{\langle \delta v(r)^2 \rangle^{3/2}} \quad (1.14)$$

Une valeur non nulle de $S(r)$ indique que la distribution n'est pas symétrique. Si la *skewness* est négative, cela signifie que des événements $\delta v < 0$ de grande amplitude sont plus probables que des événements $\delta v > 0$ de même amplitude. Dans ce cas, si on trace l'histogramme des incréments de vitesse, ou bien la fonction de probabilité $p(\delta v)$, on pourra observer l'aile de gauche est plus élevée que l'aile de droite (voir par exemple, les symboles \square sur la figure 1.7).

La relation 1.13 est appelée « loi des 4/5 ». Elle est souvent présentée comme la seule relation *exacte* de la turbulence. Elle implique que la *skewness* de la distribution de $\delta v(r)$ est négative : cela signifie que l'histogramme de $\delta v(r)$ a une aile plus longue du côté gauche. La mesure expérimentale de la dissymétrie, et notamment la confirmation du signe négatif de la *skewness*, permet de vérifier l'existence d'une cascade (mesure du flux d'énergie à travers les échelles) et son sens de propagation² (des grandes échelles vers les petites échelles si le signe est négatif et dans l'autre sens dans le cas contraire).

1.1.2 Vérifications expérimentales

De nombreuses mesures, dans des conditions diverses, ont confirmé la relation en $k^{-5/3}$ pour la densité spectrale de puissance de la vitesse (Eq. 1.7) dans la limite des très grands nombres de Reynolds. Tous les spectres obtenus se ramènent sur une même courbe, ce qui suggère que la constante de Kolmogorov C_k est universelle (voir figure 1.6). Une revue des valeurs mesurées pour C_k dans divers écoulements peut être trouvée dans [Sre95]. Ce résultat est compatible avec la théorie de Kolmogorov et il traduit l'invariance d'échelle dans la zone inertielle. Cependant, il ne prouve pas l'existence de la cascade de Richardson et n'indique pas le sens de propagation de l'énergie.

Pour aller plus loin, on peut calculer les fonctions de structure et de vérifier expérimentalement la loi des 4/5. Comme on peut le voir sur la figure 1.7 (gauche), la distribution de δv est dissymétrique pour $r/L_0 < 1$: les événements $\delta v < 0$ de grande amplitude sont plus probables que les événements $\delta v > 0$ (relèvement de l'aile gauche), donc $\langle \delta v(r)^3 \rangle < 0$. La *skewness* de la distribution de $\delta v(r)$ est négative, ce

2. On notera que dans des cas différents de celui de la turbulence 3D homogène et isotrope dont il est question ici, et notamment dans le cas d'une turbulence bi-dimensionnelle, il peut exister une cascade d'énergie inverse dans laquelle l'énergie se propage des petites échelles vers les grandes échelles.

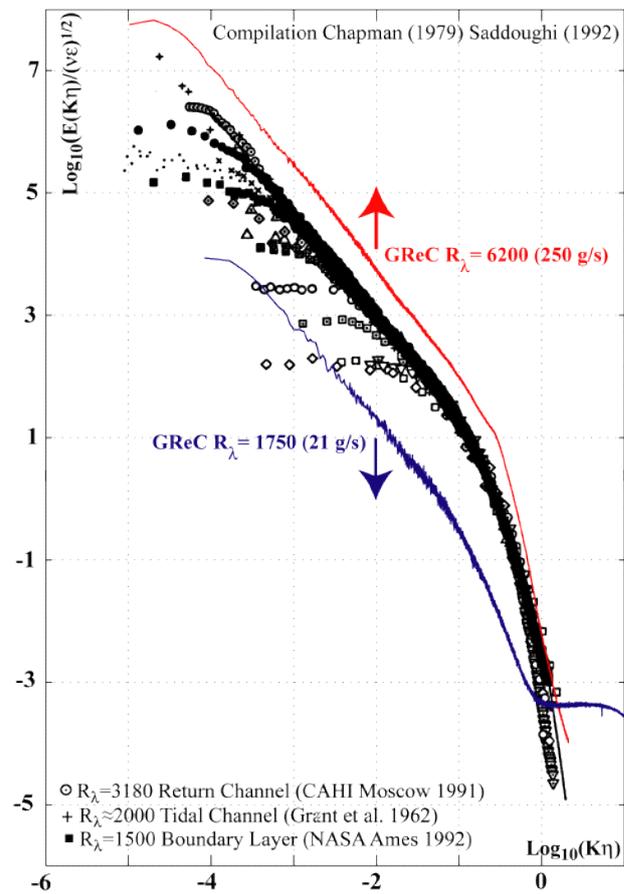


Fig 1.6 – Densité spectrale de puissance du signal de vitesse obtenu dans différents écoulements. En couleurs (avec un décalage arbitraire pour la lisibilité) : les spectres obtenus dans l'expérience GReC [Pie03] (jet d'hélium gazeux cryogénique).

qui montre que l'énergie se propage des grandes vers les petites échelles. On peut alors tracer $\langle \delta v(r)^3 \rangle$ avec une compensation par la loi des 4/5. On obtient un « plateau », ici sur plus d'une décade d'échelles (figure 1.7 droite).

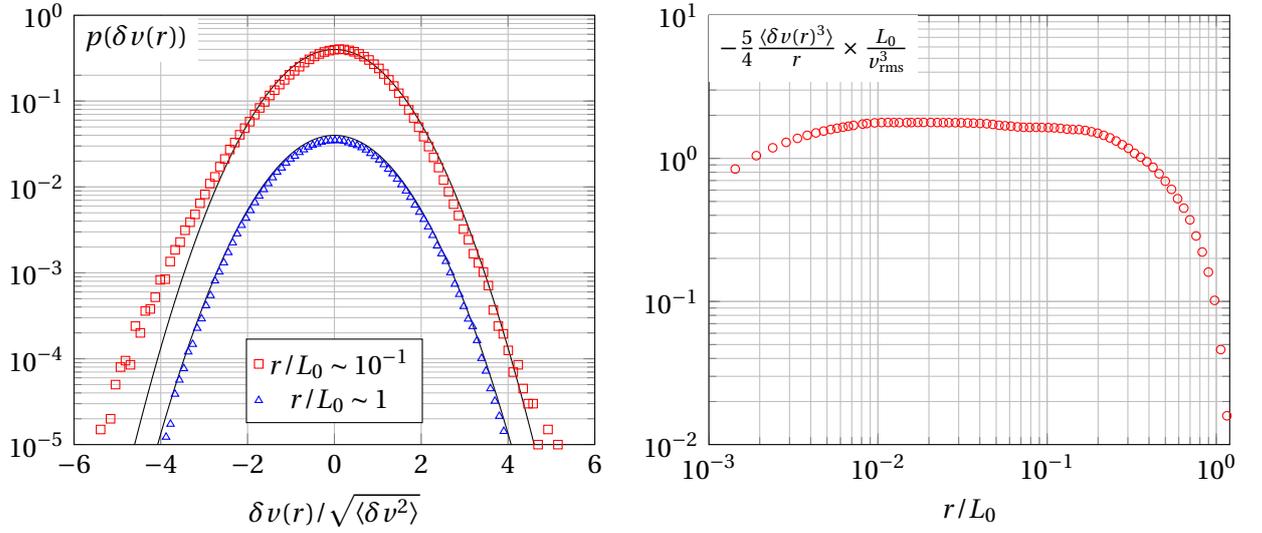


Fig 1.7 – Mesure expérimentale des incréments de vitesse dans le mini-jet de Chanal et collaborateurs ($R_\lambda = 989$). À gauche : distribution de l'incrément de vitesse δv . La courbe $r/L_0 \sim 10^{-1}$ est décalée d'une décade vers le haut pour la lisibilité. À droite : Fonction de structure d'ordre 3 compensée par la loi des 4/5.

Des mesures de dissymétrie de la distribution de $\delta v(r)$ ont été réalisées dans de nombreux écoulements. Quelques valeurs de *skewness*, pour des nombres de Reynolds basés sur la micro-échelle, R_λ , compris entre 208 et 2500, sont données par exemple dans [Che06]. Les différentes données conduisent toutes à une *skewness* de l'ordre de -0.23 pour les échelles inertielles (voir figure 1.8).

1.1.3 Au delà de Kolmogorov 1941

Si on regarde la distribution des incréments de vitesse à des échelles plus petites (figure 1.9), on peut s'apercevoir que l'histogramme a des « ailes » de plus en plus relevées, c'est-à-dire qu'il y a une probabilité importante d'observer des fluctuations importantes de la vitesse à petite échelle. Ce phénomène est appelé « intermittence ».

Une conséquence quantitative de l'intermittence est que les fonctions de structure ne suivent pas la prédiction de Kolmogorov 1941 (Eq. 1.12). De façon plus générale, on peut considérer néanmoins qu'elles suivent une loi de la forme,

$$\langle \delta v(r)^n \rangle \sim r^{\zeta(n)} \quad (1.15)$$

où $\zeta(n)$ est l'exposant de la fonction de structure d'ordre n .

Lorsque $\zeta(n)$ s'écarte de la prédiction $\zeta(n) = n/3$, on dit que les exposants sont « anormaux ». L'intermittence et les exposants des fonctions de structure ont fait l'objet de nombreux travaux qui ont conduit à proposer différents modèles. On peut citer, par exemple le modèle de Zhen-Su She & Emmanuel Lévêque [SL94] qui prédit l'expression suivante pour l'exposant des fonctions de structure :

$$\zeta(n) = \frac{n}{9} + 2 \left[1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n/3} \right] \quad (1.16)$$

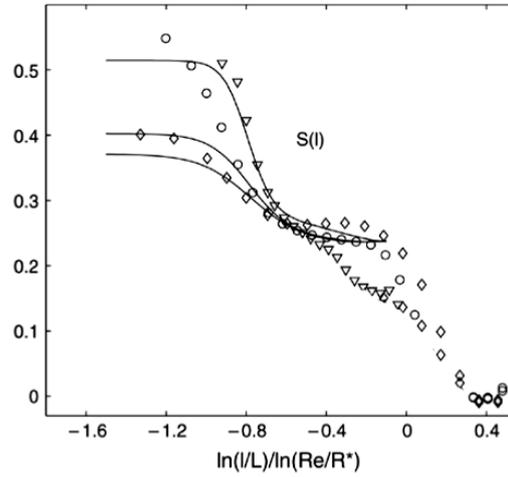


Fig 1.8 – Dissymétrie (skewness) $S(l)$ en fonction de l'échelle l pour différentes expériences. (\diamond) jet d'hélium gazeux à $R_\lambda = 208$ [Cha00]; (\circ) jet d'air à $R_\lambda = 380$ [CBC95]; (∇) soufflerie à $R_\lambda = 2500$ [Kah98]. Lignes continues : prédictions théoriques. Source : Chevillard et coll. (2006) [Che06].

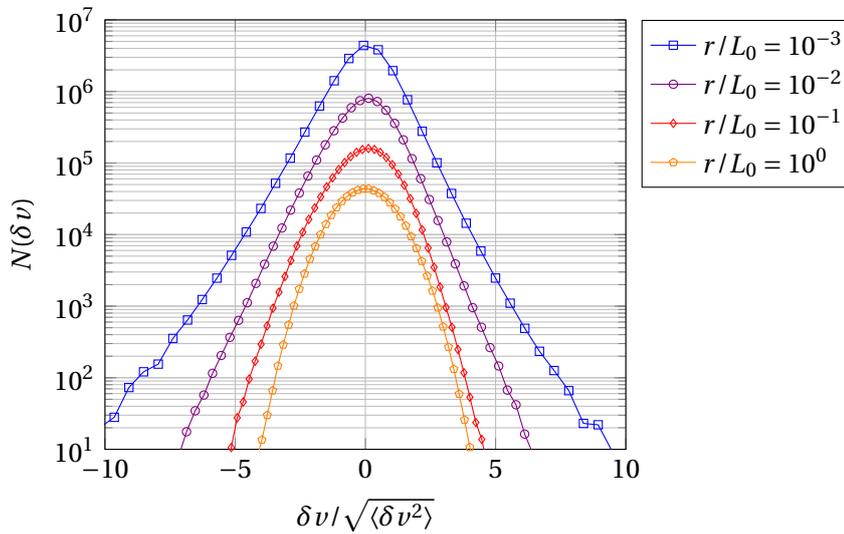


Fig 1.9 – Distribution des incréments de vitesse $\delta v(r)$ obtenus à partir des données de mini-jet de Chanal et coll ($R_\lambda = 989$). La distribution s'écarte de plus en plus de la gaussienne lorsque r devient petit.

Pour tester un tel modèle, on doit calculer $\zeta(n)$ à partir des données expérimentales, et dans les échelles inertielles. La gamme d'échelle inertielle est bien définie à très haut nombre de Reynolds. Par contre, il est plus difficile d'estimer cette gamme ainsi que la valeur de $\zeta(n)$ pour des nombres de Reynolds plus modérés, ce qui correspond pourtant aux situations expérimentales les plus courantes en laboratoire.

Pour remédier à ce problème, on peut utiliser la méthode *extended self-similarity*, proposée par Roberto Benzi et collaborateurs en 1993 [Ben93]. En effet, cette méthode permet de retrouver les exposants $\zeta(n)$ avec une assez bonne précision même à des nombres de Reynolds modérés [Ben95]. De plus, elle permet d'obtenir la valeur de l'exposant pour des valeurs non entières de n .

Cette méthode consiste à définir l'exposant à partir des incréments de vitesse absolus :

$$\langle |\delta v(r)|^n \rangle \sim r^{\zeta(n)} \quad (1.17)$$

et à écrire les fonctions de structure obtenues comme des fonctions de $\langle |\delta v|^3 \rangle$, d'où

$$\langle |\delta v(r)|^n \rangle = \langle |\delta v(r)|^3 \rangle^{\zeta(n)/\zeta(3)}. \quad (1.18)$$

On prend $\zeta(3) = 1$ et on détermine $\zeta(n)$ comme la valeur de plateau de la dérivée logarithmique :

$$\zeta(n) = \frac{d \log \langle |\delta v|^n \rangle}{d \log \langle |\delta v|^3 \rangle}. \quad (1.19)$$

La fluctuation autour du plateau est utilisée pour déterminer des barres d'erreur sur $\zeta(n)$. Le résultat obtenu avec cette technique sur les données de mini-jet d'hélium gazeux d'Olivier Chanal et collaborateurs est tracé sur la figure 1.10. On peut constater qu'il y a un bon accord entre la valeur expérimentale et le modèle.

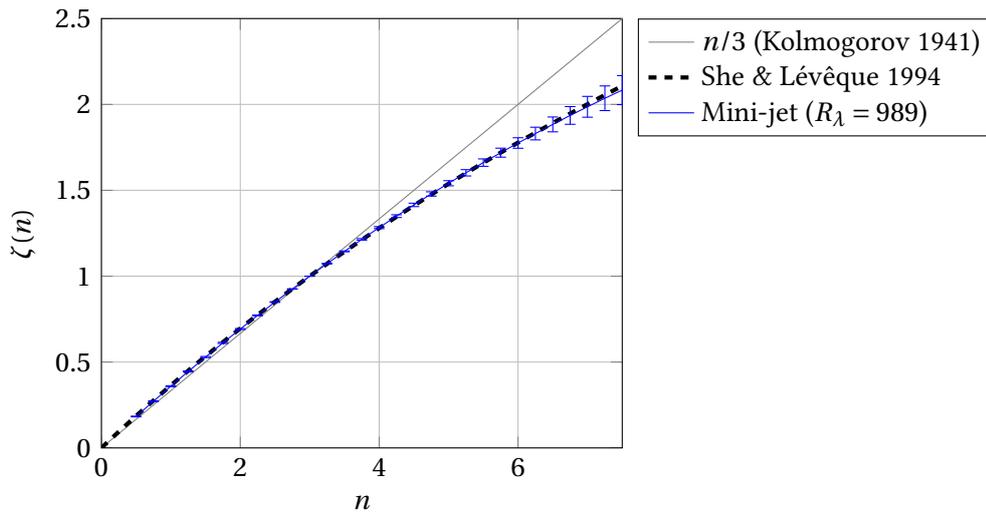


Fig 1.10 – Exposant des fonctions de structure de la valeur absolue des incréments de vitesse longitudinaux calculés par extended self similarity à partir des données de Chanal, et al.

1.2 Hydrodynamique de l'hélium

1.2.1 L'hélium cryogénique comme fluide modèle classique

Les écoulements turbulents naturels (océaniques, atmosphériques) sont caractérisés par une dimension caractéristique L_0 très grande. Cela conduit à des nombres de Reynolds (Eq. 1.3) très élevés. Il est difficile

de reproduire des conditions similaires en laboratoire avec des expériences de taille nécessairement plus petite. Il existe néanmoins quelques souffleries de grandes dimensions, notamment la soufflerie de l'ONERA à Modane (voir par exemple [CGH90]).

Pour obtenir des nombres de Reynolds comparables à ceux des écoulements naturels, une solution consiste à utiliser un fluide dont la viscosité est beaucoup plus faible que celle de l'air ou de l'eau, notamment l'hexafluorure de soufre (SF₆) pressurisé [Blu11] ou l'hélium cryogénique qui est le fluide dont la viscosité est la plus faible de tous les fluides connus (table 1.1).

Fluide	T [K]	P [bar]	$\nu = \eta/\rho$ [m ² /s]
Air	293	1	$1,5 \times 10^{-5}$
Eau	293	1	$1,0 \times 10^{-6}$
SF ₆	300	15	$1,5 \times 10^{-7}$
He _(g)	4.2	1	$7,4 \times 10^{-8}$
He _(l)	4.2	1	$2,6 \times 10^{-8}$

TABLE 1.1 – Viscosité cinématique ν de quelques fluides.

L'utilisation d'hélium cryogénique gazeux comme fluide de travail a permis de réaliser des expériences pouvant atteindre les plus grands Reynolds accessibles en laboratoire, en particulier avec l'expérience « GReC » au CERN [Pie03], et les plus résolues spatialement et temporellement notamment une expérience de jet d'hélium cryogénique réalisée dans l'équipe à Grenoble [Cha94; Cha00], et une expérience dans une configuration Von Kármán³ [Zoc94]. L'hélium cryogénique est donc un fluide très bien adapté à l'étude de la turbulence à très grand nombre de Reynolds.

1.2.2 Propriétés exotiques à basse température : He I et He II

À pression atmosphérique et à une température de l'ordre de 4,2 K, l'hélium (⁴He) forme une phase liquide, appelée He I. Il s'agit d'un fluide visqueux classique dont la dynamique est décrite par l'équation de Navier-Stokes. Lorsque l'on refroidit l'hélium liquide jusqu'à $T_\lambda \approx 2,17$ K (à la pression de vapeur saturante), celui-ci subit une transition de phase. Cet état de la matière a été obtenu pour la première fois par Heike Kamerlingh Onnes⁴ dans les années 1920 [Onn22]. L'existence d'une transition de phase, parfois appelée transition « lambda » à cause de la forme de la courbe de chaleur spécifique qui diverge au passage de la transition et dont la forme évoque la lettre grecque λ , a été mise en évidence par l'étudiant de H.K. Onnes, Willem Hendrik Keesom à Leiden en 1927 [KK35]. La phase obtenue pour $T < T_\lambda$ est appelée He II.

Ce nouvel état de la matière possède des propriétés étonnantes. On constate notamment qu'il transporte très efficacement la chaleur (c'est la raison pour laquelle il est utilisé pour refroidir les aimants supraconducteurs dans les accélérateurs de particules, comme le LHC au CERN). Cela se traduit notamment par la disparition soudaine des bulles lors de la transition de phase dans un cryostat refroidi par pompage.

De plus, H.K. Onnes avait remarqué qu'à très basse température, le niveau d'hélium liquide dans un bécher partiellement plongé dans le bain s'égalait avec le niveau du bain. Ce phénomène est possible par l'existence d'un écoulement de matière le long des parois (parfois appelé « effet Onnes » en hommage à la première observation par H.K. Onnes). Cet effet de transport a été mis en évidence et interprété en 1939 par Bernard V. Rollin et F. Simon [RS39], et étudié systématiquement par J.G. Daunt et K. Mendelssohn

3. Il s'agit d'une cellule dans laquelle le fluide est brassé entre deux pales contra-rotatives

4. Heike K. Onnes est lauréat du prix Nobel 1913 pour ses études des propriétés de la matière à basse température. Il est le premier à avoir liquéfié l'hélium, qu'il a refroidi jusqu'à 0,9 K.

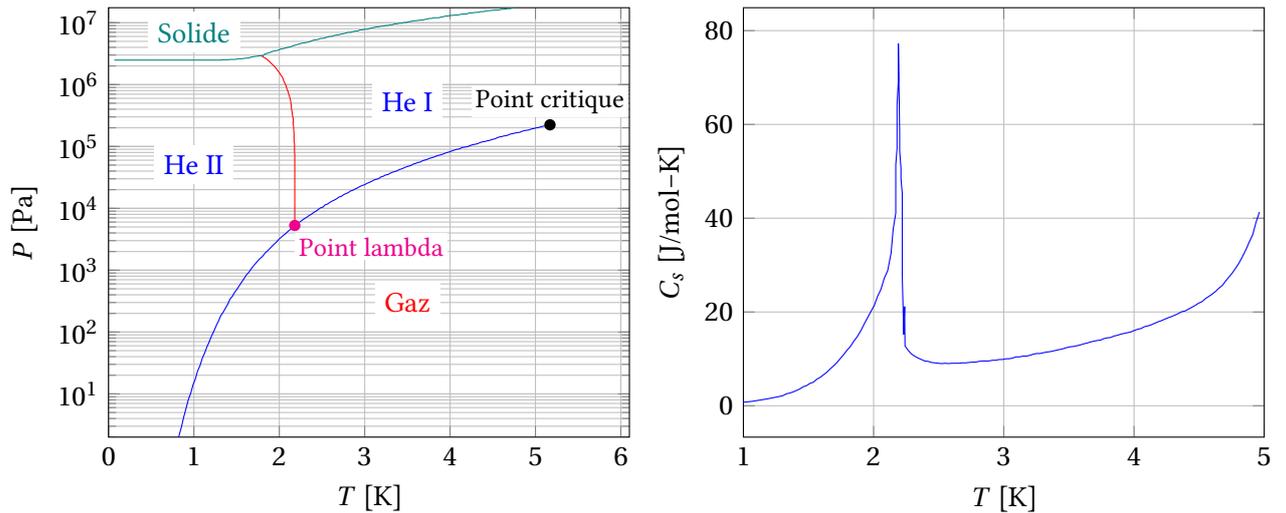


Fig 1.11 – À gauche : diagramme de phase de ^4He (données de Brooks & Donnelly [BD77]). À droite : capacité thermique de l'hélium (à pression de vapeur saturante) avec une divergence à $T_\lambda \approx 2,17$ K (données Donnelly & Barenghi [DB98]).

[DM39]. Ainsi, lorsqu'on place un béccher rempli d'hélium II au dessus du bain, le liquide s'écoule sous forme d'un film qui recouvre les parois, forme des gouttes sous le béccher qui finissent par retomber dans le bain. La vitesse de remplissage (ou de vidage) du béccher dépend uniquement de la température (vitesse nulle à T_λ et qui augmente lorsque la température diminue). Cette vitesse ne dépend pas de la différence de potentiel gravitationnel, et de ce fait, permet d'exclure un mécanisme de siphon classique.

Les expériences d'écoulement réalisées en 1937 par Pyotr Kapitza d'une part [Kap38], et par John F. Allen et Don Misener [AM38] d'autre part, semblent indiquer que l'He II ne possède aucune viscosité. Par analogie avec la supraconductivité, P. Kapitza a proposé⁵ d'appeler cet état de la matière « superfluide ». En particulier, les mesures d'écoulement dans des capillaires se révèlent sensiblement indépendantes de la pression appliquée et du diamètre du capillaire, ce qui n'est possible qu'en absence de viscosité.

D'autre part, la même année, John F. Allen et Harry Jones découvrent l'effet « fontaine » [AJ38] dans l'He II : un flux de chaleur appliqué à l'extrémité d'un tube bouché par un matériau poreux conduit à un écoulement stationnaire de liquide (voir figure 1.12 pour une illustration de l'effet « fontaine » et de l'effet « Onnes »).

Une interprétation microscopique a été proposée par Fritz London dès 1938 [Lon38] : la transition superfluide peut être vue comme une condensation de Bose-Einstein où une fraction macroscopique des atomes d'hélium sont dans un seul état quantique. Cependant, contrairement à un gaz de Bose, il existe des interactions importantes entre les atomes.

La description actuelle de l'He II à température finie a été proposée par László Tisza et Lev Landau⁶ en 1941 [Lan41] : le système se comporte comme une superposition de deux « fluides » ou deux « composantes ». La composante « normale » est constituée par les excitations thermiques (phonons et rotons) et concentre toute l'entropie du système. La composante « superfluide », sans entropie, provient de l'état quantique fondamental du système.

Macroscopiquement, la composante « normale » se comporte comme un fluide visqueux classique. La composante « superfluide » se comporte comme un fluide quantique non visqueux. Les deux composantes

5. P. Kapitza a obtenu le prix Nobel pour ses découvertes en physique des basses températures en 1978.

6. Lev Landau a obtenu le prix Nobel en 1962 pour ses travaux en matière condensée et notamment sur l'hélium liquide.

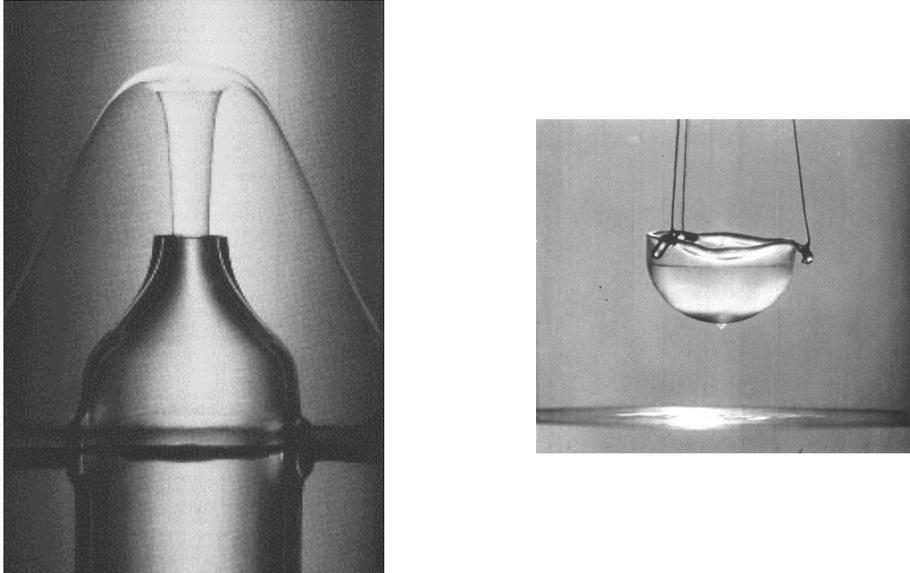


Fig 1.12 – À gauche : effet fontaine photographié par J.F. Allen en 1971. À droite : film de Rollin (ou effet Onnes) photographié par Alfred Leitner pour son film « Liquid Helium, Superfluid » en 1963.

sont couplées par une force de friction mutuelle (proposée par Gorter et Mellink en 1949 [GM49]). On note ρ_s et ρ_n les densités respectives de la composante superfluide et de la composante normale. La densité totale ρ est donnée par

$$\rho = \rho_n + \rho_s \quad (1.20)$$

La fraction relative de superfluide ρ_s/ρ augmente lorsque la température diminue : $\rho_s/\rho = 0$ à T_λ et $\rho_s/\rho = 1$ dans la limite $T = 0$ (voir figure 1.13).

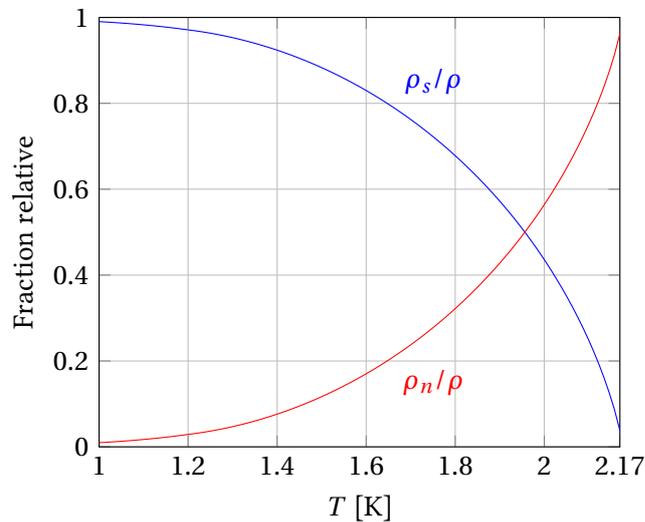


Fig 1.13 – Fraction relative des composantes normale et superfluide.

De plus, comme l'a suggéré Lars Onsager⁷ dès 1949 (voir la note 1 page 281 dans [Ons49]), la circulation

7. Lars Onsager a reçu le prix Nobel de chimie en 1968 pour la découverte des relations réciproques qui portent son nom qui

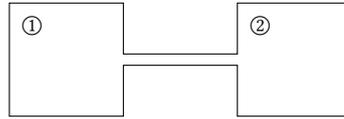
de la vitesse de la composante superfluide \vec{v}_s ,

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{v}_s \cdot d\vec{r} \quad (1.21)$$

où \mathcal{C} est un contour fermé quelconque dans le liquide doit prendre une valeur quantifiée en unités de $\kappa = 2\pi\hbar/m$ où m est la masse de l'atome d'hélium. Richard P. Feynman⁸ a proposé en 1958 une description de l'écoulement superfluide comme un écoulement irrotationnel en tout point ($\nabla \times \vec{v} = \vec{0}$) sauf sur des lignes très fines (de l'ordre de l'Ångström) appelées lignes de vortex quantiques (ou tourbillons quantiques) [Fey58]. Chaque ligne porte une vorticité κ . Cette description a été confirmée par des mesures expérimentales de circulation de vitesse, proches du quantum de vorticité, réalisées par William F. Vinen en 1960 [Vin61].

1.2.3 Premier et second sons de l'He II

L'existence de deux composantes dans l'He II implique qu'il peut exister deux types d'ondes sonores, selon que les deux fluides oscillent en phase, le « premier son », ou en opposition de phase, le « second son ». Déterminons l'équation du « second son ». Pour cela, on considère deux réservoirs remplis d'hélium II schématisés ci-dessous :



On appelle \vec{v}_s et \vec{v}_n les vitesses des composantes superfluides et normales, p le champ de pression, T le champ de température, ρ la densité totale et s l'entropie par unité de masse d'He II. Un écoulement peut s'établir s'il y a un gradient de potentiel chimique⁹ μ ,

$$\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} + (\vec{v}_s \cdot \nabla) \vec{v}_s = -\nabla \mu \quad (1.22)$$

avec

$$d\mu = -sdT + \frac{1}{\rho} dp \quad (1.23)$$

S'il n'y a pas de dissipation, on peut écrire une équation de conservation de l'entropie par unité de masse d'He II, s , qui est portée uniquement par la composante normale,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \nabla \cdot (\rho s \vec{v}_n) = 0 \quad (1.24)$$

On suppose que la quantité de mouvement totale est nulle à chaque instant, c'est-à-dire,

$$\rho_s \vec{v}_s + \rho_n \vec{v}_n = 0 \quad (1.25)$$

Dans le cas où il n'y a pas de fluctuation de densité totale, $\partial\rho/\partial t = 0$, ni de gradient de pression $\nabla p = 0$, et en écrivant $ds = \frac{c_p}{T} dT$, avec c_p la capacité thermique massique, les équations 1.22 à 1.25 se réécrivent, dans le cas unidimensionnel, au premier ordre (hypothèse acoustique) :

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} - s_0 \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{c_p}{T_0} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\rho_s}{\rho_n} s_0 \frac{\partial v_s}{\partial x} = 0 \quad (1.26)$$

sont fondamentales pour la thermodynamique des processus irréversibles.

8. Richard P. Feynman est par ailleurs co-lauréat du prix Nobel 1965 pour ses travaux sur l'électrodynamique quantique.

9. Ce potentiel chimique conduit à une équation d'Euler pour \vec{v}_s . On peut ajouter un terme de friction mutuelle $-\frac{\rho_n}{\rho}(\vec{v}_n - \vec{v}_s) \cdot d(\vec{v}_n - \vec{v}_s)$.

D'où une équation de d'Alembert pour la température,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - c_2^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (1.27)$$

où $c_2^2 = \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{s_0^2 T_0}{c_p}$ est le carré de la vitesse du « second son ». Quelques valeurs de s et c_2 sont données dans la table 1.2 pour quelques températures.

T [K]	ρ_s/ρ	s [J kg ⁻¹ K]	c_2 [m/s]
1,55	0,86	237	19,7
1,80	0,68	544	19,5
2,00	0,44	958	16,5
2,10	0,25	1256	12,3
2,15	0,11	1447	7,87
2,16	0,08	1492	6,39

TABLE 1.2 – Quelques valeurs de vitesse du second son, c_2 , et d'entropie par unité de masse d'He II, s , pour quelques températures (correspondant à différentes fractions superfluide ρ_s/ρ), à la pression de vapeur saturante.

Contrairement à un fluide classique dans lequel la température obéit à une équation de diffusion, une fluctuation de température dans l'He II est donc transportée sous la forme d'une onde (*second son*), de façon similaire à une fluctuation de pression (*premier son*). Cela permet d'expliquer pourquoi l'He II transporte très efficacement la chaleur.

1.3 Turbulence quantique

1.3.1 Nombre de Reynolds

La définition classique du nombre de Reynolds (Eq. 1.3) fait intervenir la viscosité ν au dénominateur. L'hélium superfluide est réputé non visqueux. La façon de définir un nombre de Reynolds en He II n'est donc pas évidente *a priori*.

En pratique, il existe deux grandeurs tabulées pour l'He II qui possèdent la dimension d'une viscosité : (i) le quantum de vortacité κ et (ii) la viscosité dynamique η de la composante normale. Nous discuterons plus loin dans la thèse des différentes viscosités effectives qui peuvent être définies dans l'hélium (section 4).

Nous nous contenterons pour le moment de définir, par analogie avec les écoulements classiques, un nombre de Reynolds, basé sur le quantum de vortacité, Re_κ , comme :

$$Re_\kappa = \frac{L_0 v_{\text{rms}}}{\kappa} \quad (1.28)$$

1.3.2 Enchevêtrement de vortex

Comme expliqué dans la première partie de l'introduction, lorsqu'un fluide (comme l'air ou l'eau) est fortement brassé, cela conduit à la production de structures (tourbillons) et à une cascade d'énergie depuis les grandes structures vers des structures plus petites.

Or, les tourbillons dans l'hélium superfluide sont quantifiés avec un quantum de circulation $\kappa = 2\pi\hbar/m$ et prennent la forme de lignes de vortex. Ces lignes de vortex quantiques interagissent et peuvent se

recombinaison lorsqu'elles se croisent. Lorsque le fluide est fortement brassé, elles forment une pelote de lignes enchevêtrées (figure 1.14). La dynamique de cette pelote constitue la « turbulence quantique », appelée également « turbulence superfluide ».

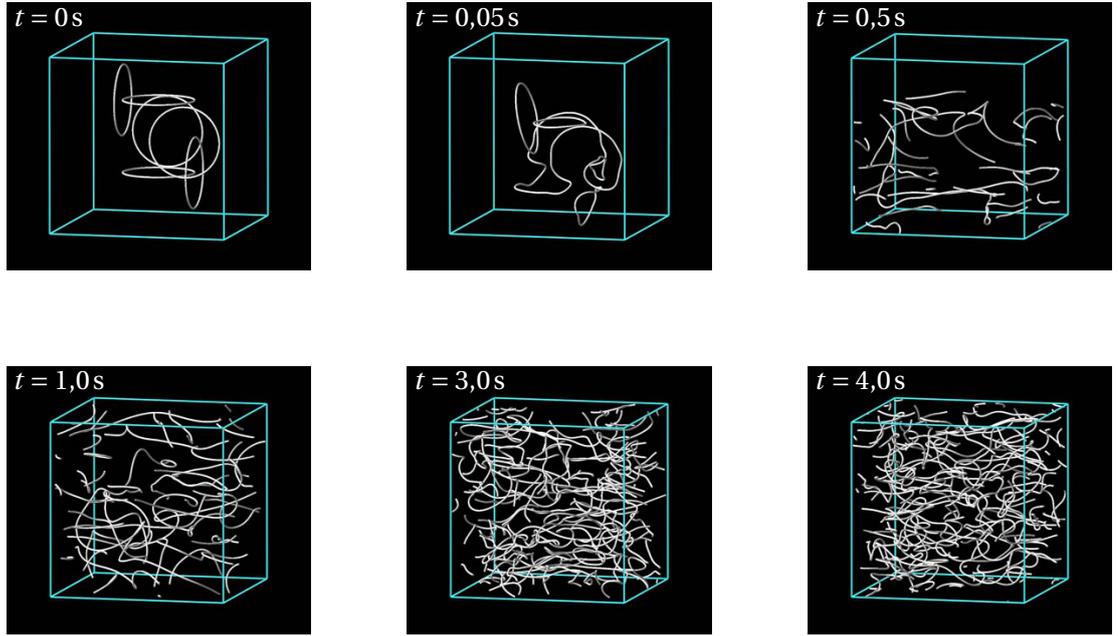


Fig 1.14 – Développement de l'enchevêtrement de lignes de vortex quantiques simulé par Adachi et collaborateurs [AFT10] par un calcul de Biot-Savart sur une boîte de taille 0,1 cm avec conditions aux limites périodiques. La température est $T = 1,9\text{K}$, le flux de masse total est nul et $v_n - v_s = 0,572\text{ cm/s}$ (écoulement de contre-courant). La densité de lignes de vortex est $L \approx 60\text{ m/cm}^3$.

Pour caractériser la pelote de vortex, on définit la densité de lignes de vortex, L , comme la somme des longueurs de toutes les lignes de vortex quantiques normalisée par le volume de liquide considéré,

$$L = \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} dl \quad (1.29)$$

où \mathcal{V} est le volume de fluide considéré et où la somme est effectuée le long de tous les éléments de lignes de vortex dl situés dans le volume \mathcal{V} considéré. En supposant que les lignes de vortex sont suffisamment lisses aux échelles plus petites que la distance inter-vortex typique δ , il est d'usage de définir une distance inter-vortex caractéristique à partir de L :

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{L}} \quad (1.30)$$

Expérimentalement, il est possible de mesurer la densité de lignes de vortex à l'aide de détecteurs à second son. En effet, de nombreuses mesures réalisées par William F. VINEN [Vin57a ; Vin57b ; Vin57c ; Vin58], ont montré que les ondes de second son sont atténuées par les lignes de vortex quantiques orthogonales à la direction de propagation. Le taux d'atténuation par unité de longueur ξ_{VLD} est relié essentiellement [MPS85] à la densité de ligne de vortex projetées L_{\perp} comme,

$$\xi_{\text{VLD}} = \frac{B\kappa L_{\perp}}{4c_2} \quad (1.31)$$

où B est la constante de friction mutuelle de Vinen et L_{\perp} est la densité de lignes de vortex projetées, définie comme

$$L_{\perp} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \sin^2 \theta \cdot dl \quad (1.32)$$

où la somme est effectuée le long de tous les éléments de lignes de vortex dl situés dans le volume de mesure Ω et θ est l'angle entre l'élément de ligne et l'axe de propagation des ondes de second son. Dans le cas d'une turbulence homogène et isotrope, L_{\perp} peut être reliée à la densité totale 3D, L , par la relation,

$$L = \frac{3}{2} L_{\perp} \quad (1.33)$$

L'estimation de la densité de ligne de vortex, L , permet de donner un ordre de grandeur de la distance inter-vortex. Par exemple, dans la simulation numérique d'Adachi et collaborateurs [AFT10], δ vaut typiquement $130 \mu\text{m}$ (figure 1.14). Expérimentalement, l'équation 1.31 a été établie dans un contexte où les lignes de vortex étaient essentiellement parallèles. En généralisant *a priori* cette relation à la situation de turbulence, on peut estimer la densité de lignes de vortex. δ est de l'ordre de $4 \mu\text{m}$ dans la conduite turbulente de Roche et collaborateurs [Roc07] (diamètre $\Phi = 23 \text{ mm}$ avec un nombre de Reynolds basé sur κ , Re_{κ} , compris entre 6×10^4 et 3×10^5).

1.3.3 Écoulements turbulents

Dans la suite, on s'intéresse à deux types d'écoulement, turbulent ou non, qui peuvent être produits dans l'hélium II :

- écoulement de « contre-courant » dans lequel les composantes normale et superfluide ont des vitesses moyennes de direction opposée ;
- écoulement de « co-courant » dans lequel les composantes normale et superfluide ont des vitesses moyennes égales et de même sens.

Dans cette partie, nous allons présenter ces deux types d'écoulements et les questions spécifiques qu'ils posent.

Écoulement de contre-courant

Tout d'abord, considérons quelques questions spécifiques aux écoulements de contre-courant, qui correspondent à la situation schématisée sur la figure 1.15. Une conduite adiabatique de section A , remplie d'hélium II à température T , est ouverte à une extrémité et fermée à l'autre. L'extrémité ouverte est en contact avec le bain d'hélium qui joue le rôle d'un réservoir isotherme. Une puissance thermique $\mathcal{P} = Ri^2$, correspondant à un flux thermique $j = \mathcal{P}/A$, est imposée à l'extrémité fermée de la conduite. Rappelons que la composante superfluide de l'hélium II ne transporte aucune entropie. Le flux thermique n'est donc transporté que par la composante normale, d'entropie s par unité de masse d'He II, d'où

$$j = \frac{\mathcal{P}}{A} = \rho_s T v_n \quad (1.34)$$

avec $v_n > 0$ la vitesse moyenne de la composante normale, projetée sur un axe orienté de l'extrémité fermée à l'extrémité ouverte, conséquence du flux thermique imposé. Par ailleurs, le flux de masse est nul, d'où

$$\rho_n v_n + \rho_s v_s = 0 \quad (1.35)$$

Il apparaît un écoulement, sans analogue classique, sans flux net de masse, avec des vitesses v_n et v_s opposées. Les premières études systématiques de ce type d'écoulement ont été réalisées au milieu du XX^e siècle dans des conduites capillaires de petit diamètre (de l'ordre de 1 mm) par William F. Vinen

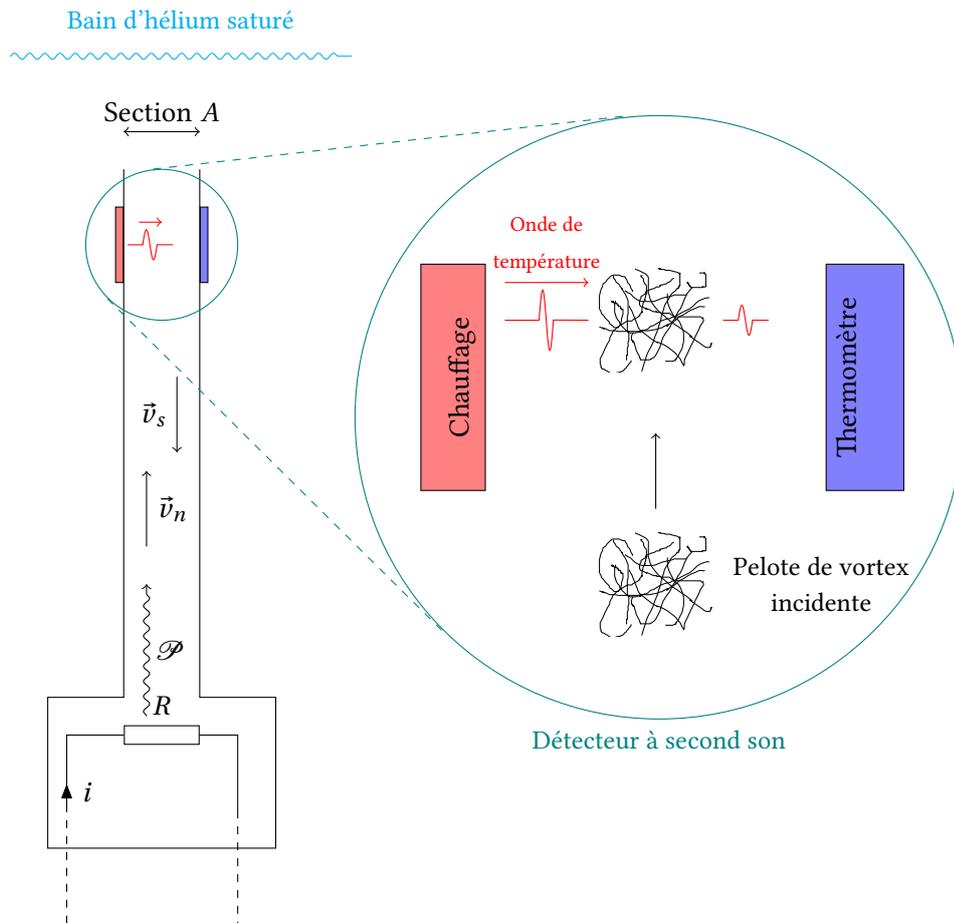


Fig 1.15 – Schéma d'une expérience de contre-courant équipée d'un détecteur à second son macroscopique.

[Vin57a ; Vin57b ; Vin57c ; Vin58]. La plupart des études consistent à mesurer l'atténuation d'une onde test de second son se propageant transversalement à l'écoulement, notée α ou à effectuer des mesures du gradient thermique de part et d'autre du capillaire, noté $\text{grad } T$. Il peut apparaître alors jusqu'à trois régimes¹⁰ :

- pour $j < j_0$, pas ou peu d'atténuation de l'onde de second son ;
- pour $j_0 < j < j_c$, atténuation de l'onde de second son avec $\alpha \propto j^2$;
- pour $j > j_c$, atténuation plus importante de l'onde de second son.

Une interprétation courante est que j_0 corresponde à la transition vers la turbulence de l'écoulement de la composante superfluide et que j_c corresponde à la transition vers la turbulence de l'écoulement de la composante normale [MB98].

Il apparaît souhaitable de trouver un nombre sans dimension pour caractériser ces seuils. Le flux critique j_c permet de calculer une vitesse critique v_{nc} (Eq. 1.34). Pour construire un nombre de Reynolds, il faut choisir une échelle de longueur typique. Il n'est pas évident que l'écoulement obtenu soit caractérisé par l'échelle transverse de la conduite d comme dans son analogue classique.

On peut néanmoins choisir de définir un nombre de Reynolds R_n à partir de l'échelle transverse d :

$$R_n = \frac{\rho_n v_n d}{\eta_n} \quad (1.36)$$

Les mesures de J.T. Tough dans les années 60 [Tou66] conduisent à un nombre de Reynolds critique de l'ordre de 2×10^3 pour des conduites circulaires. Mais ce critère ne permet pas de comprendre l'ensemble des résultats disponibles dans la littérature. À l'heure actuelle, il n'y a pas de consensus sur le critère de transition.

Par ailleurs, aucune mesure de fluctuation locale résolue en temps et en espace n'a été publiée à ce jour pour ce type d'écoulement, si bien qu'on ne connaît que très peu de quantités statistiques pour ce type de turbulence. On ne sait pas notamment s'il existe une hiérarchie d'échelle analogue à l'image classique de la cascade de Richardson. La littérature fait souvent implicitement l'hypothèse inverse : une absence de corrélation et un spectre blanc.

Un début de réponse a néanmoins été apporté en 2005 par Tao Zhang & Steven W. Van Sciver : ils ont utilisé des techniques de visualisation (ensemencement de particules et calcul de champ de vitesse par *Particle Image Velocimetry* ou PIV) pour mesurer le champ de vitesse¹¹ à grande échelle autour d'un cylindre dans un écoulement de contre-courant [ZS05] (figure 1.16). Cette expérience a mis en évidence que des structures pouvaient exister à grande échelle dans un sillage de contre-courant. Elles s'apparentent à celles obtenues dans un sillage classique.

Cependant, cette expérience ne donne pas d'indication définitive pour la grande échelle à choisir pour un écoulement de conduite, et elle n'indique pas l'existence d'une hiérarchie d'échelle ou d'une cascade d'énergie analogue à la cascade classique de Richardson.

Écoulement de co-courant

Le deuxième type d'écoulement que l'on peut obtenir dans l'He II est l'écoulement de co-courant. Dans ce cas, les vitesses moyennes des composantes normales et superfluides sont dans la même direction.

Ce type d'écoulement est obtenu lorsque le fluide est mis en mouvement par un forçage mécanique. Plusieurs types de forçages ont été mis en œuvre depuis près de 50 ans, conduisant à une large panoplie d'écoulements. On peut citer par exemple

10. Le nombre de régimes observé dépend de la forme de la conduite, et peut-être de sa section.

11. Il n'y a pas de consensus ferme sur l'interprétation de la trajectoire des particules : mesurent-elles la vitesse du normal ou celle du superfluide ? Par ailleurs, les expériences de Gregory P. Bewley et collaborateurs [Bew08] semblent indiquer que les vortex et les particules peuvent s'attacher, ce qui permet de voir des événements qui ressemblent à des reconnections de lignes de vortex quantiques.

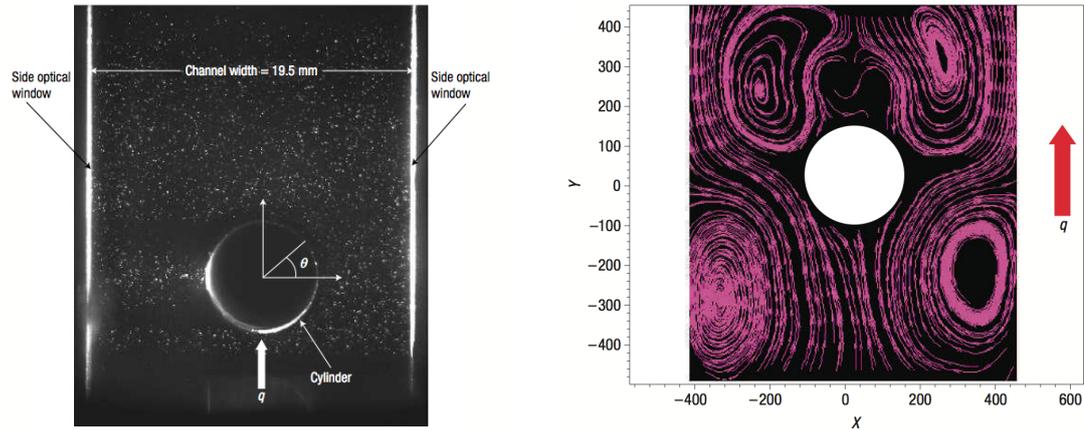


Fig 1.16 – Expérience de contre-courant T. Zhang & S. W. Van Sciver (2005) [ZS05] ($T = 2,03\text{ K}$, $j = 1,12\text{ W/cm}^2$). À gauche : ensemencement de particules ($1,7\text{ }\mu\text{m}$ de diamètre). À droite : lignes de courant obtenues par PIV.

- écoulement instationnaire obtenu en tirant une grille dans le liquide (on parle de « grille tirée »). Cette technique a l'avantage de ne pas avoir besoin d'une puissance de refroidissement trop importante et de produire une turbulence homogène spatialement. Elle permet notamment des mesures de turbulence en décroissance [SSD99 ; NSD05] ;
- écoulement induit par la rotation du volume d'étude [HV56] ;
- écoulement stationnaire obtenu en brassant le fluide dans le volume d'étude, par exemple avec deux pales contrarotatives (écoulement de Von Kármán) [MT98 ; SS09] ;
- écoulement dans une boucle fermée, mis en mouvement à l'aide d'une pompe (centrifuge ou à soufflets). Par exemple : [Wal88b ; HS92 ; Rou94 ; Roc07] ;
- écoulement de jet [Dur11b ; Dur11a].

La plupart des expériences menées jusqu'à présent ont consisté en des mesures globales (perte de charge, atténuation d'une onde de second son, décroissance de la turbulence, force de traînée sur un obstacle). Elles ont permis de montrer que le taux de décroissance de la turbulence [SSD99 ; NSD05 ; CGS07 ; WG08] et la force de traînée [Wal88b ; Rou94 ; SHS99 ; FBS01] mesurés dans un écoulement turbulent sont très proches au dessus et en dessous de la transition superfluide.

La première mesure de fluctuation locale de vitesse a été obtenue en 1998 par Jean Maurer et Patrick Tabeling [MT98] dans la géométrie de Von Kármán. Elle a permis notamment de calculer la densité spectrale de puissance de la vitesse au dessus et en dessous de la transition superfluide (figure 1.17). Le spectre obtenu est compatible avec une loi d'échelle de type Kolmogorov en $f^{-5/3}$ et indiscernable au dessus et en dessous de la transition superfluide. Cependant, très peu de mesures de ce type ont été publiées. De plus, aucune étude de la cascade d'énergie (comme une mesure de la *skewness* de la distribution des incréments de vitesse) n'a été publiée.

Deux études expérimentales ont révélé des différences en ce qui concerne le spectre de vorticité dans l'He II [Roc07] et également dans la phase superfluide B de ^3He [Bra08] : en turbulence classique, le spectre 1D de fluctuation locale de vorticité est plat ou légèrement décroissant [ABS88 ; KA93] alors que les spectres 1D obtenus en turbulence superfluide sont en $k^{-5/3}$. Une interprétation proposée a été la suivante : le champ de tourbillons quantiques se décompose en un champ de tourbillons polarisés (qui transporte l'essentiel de l'énergie) et un champ isotrope d'excitations à petite échelle (portant l'essentiel de la « vorticité » superfluide) advectées quasi-passivement par l'écoulement à plus grande échelle et déterminant le spectre de la densité de lignes de vortex.

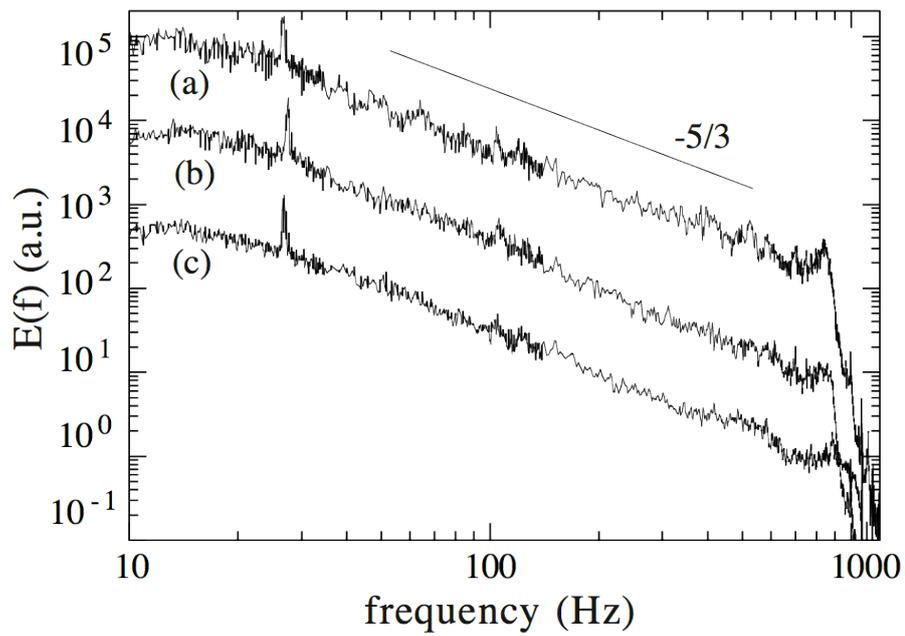


Fig 1.17 – Spectres de vitesse obtenus par J. Maurer et P. Tabeling (1998) dans une cellule de Von Kármán remplie d'hélium liquide au dessus et en dessous de la transition superfluide. (a) 2,3 K; (b) 2,08 K; (c) 1,4 K. Les trois courbes sont décalées d'une décade par souci de clarté.

2 Développement de micro-capteurs de vitesse

Sommaire

2.1	Enjeux des mesures locales de vitesse	23
2.2	Vers les plus petits tubes de Pitot	23
2.2.1	Principe d'un capteur à pression de stagnation	23
2.2.2	Mise en œuvre expérimentale	25
2.2.3	Sensibilité aux perturbations acoustiques	28
2.2.4	Limites de miniaturisation	30
2.3	Anémomètre à micro-poutrelle	30
2.3.1	Principe	30
2.3.2	Conception du capteur	31
2.3.3	Déflexion de la micro-poutrelle	31
2.3.4	Le premier prototype	42
2.3.5	Perspectives	49

2.1 Enjeux des mesures locales de vitesse

La première mesure de fluctuation locale de vitesse dans un écoulement turbulent d'hélium superfluide a été menée avec succès par Jean Maurer et Patrick Tabeling à l'aide d'un tube de Pitot millimétrique placé dans une cellule de Von Kármán remplie d'hélium liquide, au dessus et au dessous de T_λ [MT98]. Ces mesures ont conduit à un spectre de puissance en $f^{-5/3}$ compatible avec une loi d'échelle de Kolmogorov sur une décade et demie de fréquence. Ce résultat est la première indication expérimentale qu'une cascade énergétique de type Kolmogorov peut s'établir dans un écoulement d'hélium superfluide. Cependant, pendant plus de 10 ans, il n'y a eu aucune confirmation ou infirmation expérimentale de ce résultat.

Ceci est différent de la situation qui prévaut en turbulence classique, où de nombreuses données expérimentales sont disponibles pour toutes sortes d'écoulement. Cette approche expérimentale qui consiste à effectuer des mesures locales et à analyser leurs statistiques a été très fructueuse pour l'étude de la turbulence classique. Notre but est de contribuer à reproduire cette approche expérimentale pour le cas de la turbulence superfluide.

Pour cela, il est nécessaire de concevoir une instrumentation adaptée aux conditions cryogéniques et aux échelles temporelle et spatiale de fluctuations locales.

2.2 Vers les plus petits tubes de Pitot

2.2.1 Principe d'un capteur à pression de stagnation

Pour permettre la comparaison directe des statistiques classiques et des statistiques superfluides, il est souhaitable d'avoir un capteur local qui puisse fonctionner aussi bien au dessus qu'en dessous de la transition superfluide. Malheureusement, les capteurs cryogéniques locaux les plus performants à ce

jour ne peuvent être utilisés que dans un seul des deux états : les fils chauds pour $T > T_\lambda$ [Cas94 ; Zoc94 ; Cha00 ; Pie03] et les pinces à second son pour $T < T_\lambda$ [Roc07] (voir chapitre 4).

Une solution consiste à utiliser des capteurs à pression de stagnation dont le principe de fonctionnement est proche des tubes de Pitot : la différence de vitesse entre la pointe du capteur (la partie sensible) où se trouve un point d'arrêt, et la vitesse moyenne de l'écoulement conduit à une surpression. Cet effet est d'origine inertielle : la force exercée sur la membrane du capteur de pression est due au flux de quantité de mouvement incident.

Dans un fluide classique, le flux de quantité de mouvement $\vec{j} \cdot \vec{v}$ s'écrit $\rho \bar{v}^2$. La relation exacte entre la surpression mesurée $p_{\text{meas}}(t)$ et la vitesse est donnée, sous certaines conditions, par la relation de Bernoulli,

$$p_{\text{meas}}(t) = p(t) + \frac{1}{2} \rho v(t)^2 \quad (2.1)$$

Dans l'hélium superfluide à température finie, la densité de quantité de mouvement peut s'écrire [Lan41],

$$\vec{j} = \rho_n \vec{v}_n + \rho_s \vec{v}_s \quad (2.2)$$

Comme le signal sur le capteur de pression provient du flux de quantité de mouvement, on s'attend *a priori* à être sensible à une vitesse impulsionnelle [Kiv02], $\vec{v}_m = \vec{j} / \rho$, qui est la moyenne pondérée de la vitesse de la composante normale et celle de la composante superfluide,

$$\rho \vec{v}_m = \rho_n \vec{v}_n + \rho_s \vec{v}_s \quad (2.3)$$

Plus précisément, le flux de quantité de mouvement est la somme du flux de la composante normale $\rho_n \vec{v}_n \cdot \vec{v}_n$ et de celui de la composante superfluide $\rho_s \vec{v}_s \cdot \vec{v}_s$. D'après [MT98], la relation précise entre la surpression mesurée $p_{\text{meas}}(t)$ et les vitesses peut s'écrire comme une équation de Bernoulli modifiée,

$$p_{\text{meas}}(t) = p(t) + \frac{1}{2} \rho_s v_s^2(t) + \frac{1}{2} \rho_n v_n^2(t) \quad (2.4)$$

Ce qui peut se réécrire en fonction de $v_m(t)$ comme,

$$p_{\text{meas}}(t) = p(t) + \frac{1}{2} \rho v_m(t)^2 + \frac{\rho_n \rho_s}{2\rho} (\vec{v}_n - \vec{v}_s)^2 \quad (2.5)$$

Cette équation est similaire à celle qui est valable dans un fluide classique avec un terme supplémentaire. Si on suppose que les composantes normales et superfluides sont verrouillées aux échelles inertielles [VN02 ; RBL09], cela conduit à $(v_n - v_s)^2 \ll v_m^2$. D'autre part, $\rho_n \rho_s \leq \rho^2 / 4$. Donc ce terme supplémentaire peut être négligé.

Il est possible d'obtenir le même résultat en faisant une hypothèse moins forte lorsque le taux de turbulence est faible [Kiv02] : on suppose seulement que les composantes sont verrouillées à grande échelle, c'est-à-dire $\langle v_s \rangle = \langle v_n \rangle$ et on décompose chaque terme en sa moyenne et sa partie fluctuante :

$$v(t) = \langle v \rangle + v'(t) \quad (2.6)$$

$$p(t) = \langle p \rangle + p'(t) \quad (2.7)$$

Le taux de turbulence τ est alors défini comme,

$$\tau = \frac{\sqrt{\langle v'(t)^2 \rangle}}{\langle v \rangle} \quad (2.8)$$

La pression mesurée s'écrit alors,

$$p_{\text{meas}}(t) = \begin{cases} \langle p \rangle + p'(t) + \frac{1}{2}\rho \langle v \rangle^2 + \rho \langle v \rangle v'(t) + \frac{1}{2}\rho v'(t)^2 & \text{Pour } T > T_\lambda \\ \langle p \rangle + p'(t) + \frac{1}{2}\rho \langle v_m \rangle^2 + \rho \langle v_m \rangle v'_m(t) + \frac{1}{2} \left(\rho v'_m(t)^2 + \frac{\rho_n \rho_s}{\rho} (v'_n - v'_s)^2 \right) & \text{Pour } T < T_\lambda \end{cases} \quad (2.9)$$

On s'intéresse au cas où le taux de turbulence τ est suffisamment faible pour négliger les termes d'ordre 2. L'ordre de grandeur du terme de fluctuation de pression statique peut être estimé en turbulence classique homogène et isotrope comme [Ube53 ; Bat51 ; SP78],

$$\frac{\sqrt{\langle p'(t)^2 \rangle}}{\frac{1}{2}\rho \langle v'(t)^2 \rangle} \approx 1.4 \quad (2.10)$$

On considérera donc dans la suite, y compris au dessous de T_λ , qu'il s'agit d'un terme d'ordre $\mathcal{O}(\tau^2)$. L'équation 2.9 peut alors se réécrire au premier ordre,

$$p_{\text{meas}}(t) = \begin{cases} \langle p \rangle + \frac{1}{2}\rho \langle v \rangle^2 + \rho \langle v \rangle v'(t) + \mathcal{O}(\tau^2) & \text{Pour } T > T_\lambda \\ \langle p \rangle + \frac{1}{2}\rho \langle v_m \rangle^2 + \rho \langle v_m \rangle v'_m(t) + \mathcal{O}(\tau^2) & \text{Pour } T < T_\lambda \end{cases} \quad (2.11)$$

On obtient une équation strictement identique (au premier ordre) au dessus et en dessous de T_λ en remplaçant seulement la vitesse v par la vitesse impulsionnelle v_m pour $T < T_\lambda$. Cela permet donc une comparaison directe des statistiques locales de vitesse en turbulence classique et en turbulence superfluide.

Afin d'estimer un critère pour le taux de turbulence, l'ordre de grandeur des différentes contributions au signal est donné dans la table 2.1. On supposera que le critère obtenu reste valable pour $T < T_\lambda$. Lorsque le taux de turbulence ne dépasse pas 2 %, plus de 95 % du signal mesuré correspond au signal de vitesse. En revanche, lorsque le taux de turbulence est élevé (de l'ordre de 30 %) — comme dans un écoulement de Von Kármán — plus de 25 % du signal provient des termes du second ordre. Ce type de capteur est donc plutôt adapté à des écoulements dont le taux de turbulence est très faible, comme les écoulements de grille ou de sillage lointain.

τ	$\rho \langle v \rangle v'(t)$	$P'(t)$	$\frac{1}{2}\rho v'(t)^2$
1 %	98.8 %	0.7 %	0.5 %
2 %	97.6 %	1.4 %	1 %
10 %	89.2 %	6.3 %	4.5 %
20 %	80.6 %	11.3 %	8.1 %
30 %	73.5 %	15.5 %	11.0 %

TABLE 2.1 – Ordre de grandeur des différentes contributions au signal mesuré par un capteur à stagnation de pression.

2.2.2 Mise en œuvre expérimentale

Le principe des capteurs que j'ai mis en œuvre dans ma thèse consiste à utiliser un transducteur de pression miniature commercial et à l'emballer dans un support adapté qui permet de réduire la taille effective du capteur du point de vue de l'écoulement incident. Pour cela, j'ai utilisé trois transducteurs commerciaux, basés sur des jauges piézorésistives compatibles avec les conditions à basse température :

- Kulite CCQ-062 ;
- Siemens KPY 32-R [Bre84 ; WM87] ;

- Fujikura Ltd. FPS-51F-15PA [HKN98 ; Mae04].

Le premier est le plus petit et le plus sensible des transducteurs cryogéniques commerciaux. Les deux suivants sont plus invasifs mais aussi plus robustes.

Pour concevoir le capteur final, il faut trouver un compromis entre l’invasivité du capteur, sa sensibilité et le temps de réponse du système schématisés sur la figure 2.1 :

- Temps de propagation acoustique dans le nez : $\approx \ell/c$;
- Résonance de Helmholtz du capteur (type LC) associé au système nez+volume mort ;
- Temps de vol du plus petit tourbillon résolu (taille effective du capteur).

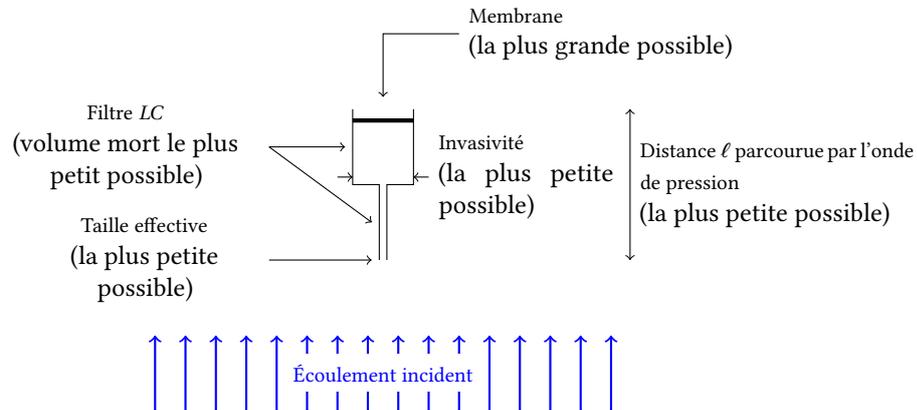


Fig 2.1 – Schéma d'un capteur à pression de stagnation avec les différentes contraintes.

En pratique, on utilise un nez de diamètre sub-millimétrique constitué d'un capillaire en cupro-nickel (voir figure 2.2). Dans la suite, on note ①, ②, ③ et ④ les quatre capteurs utilisés pendant la thèse (voir table 2.2). Le système conçu autour du transducteur « Kulite » (noté par la suite ① ou ③ selon le type d'électronique de mesure) constitue le plus petit anémomètre jamais réalisé dans l'hélium superfluide. Les différentes parties sont assemblées de façon étanche : le capillaire est soudé à l'étain sur un convergent en laiton. Un cordon de vernis colle et isole le convergent du corps principal constitué d'un tube en cupro-nickel de diamètre $\Psi = 3,5$ mm. Quatre trous latéraux de diamètre $\varnothing_{ref} = 0,5$ mm percés dans le corps principal à une distance $d_{ref} = 15$ mm permettent la mesure de la référence de pression.

Le temps de réponse est limité par la résonance de Helmholtz de fréquence proche de 2 kHz. Cela signifie que pour une vitesse moyenne de 1 m/s, on ne peut pas résoudre les échelles plus petites que 1 mm typiquement. Cela correspond à l'ordre de grandeur de la taille effective du capteur. Par conséquent, les coupures temporelle et spatiale se produisent sensiblement à la même fréquence quand le capteur est ainsi optimisé pour l'écoulement.

Les capteurs ①, ② et ④ ont été polarisés avec un tension sinusoïdale. Le signal en sortie est démodulé à l'aide d'une détection synchrone. La fréquence de polarisation est choisie dans l'intervalle 7 – 8 kHz pour les capteurs ① et ②. La technique de modulation/démodulation permet de s'affranchir d'une grande partie du bruit électromagnétique ambiant. Pour s'assurer que cette technique n'introduit pas de biais, le capteur ③ a été polarisé avec une tension continue. Le schéma électronique complet est indiqué sur la figure 2.3. Les principales caractéristiques des capteurs sont résumées dans la table 2.2.

2.2.3 Sensibilité aux perturbations acoustiques

Un exemple de spectre de puissance du signal mesuré par un capteur de type tube de Pitot miniature, P est tracé sur la figure 2.4 après suppression de la puissance du bruit P_{bb} mesurée sans écoulement. Il

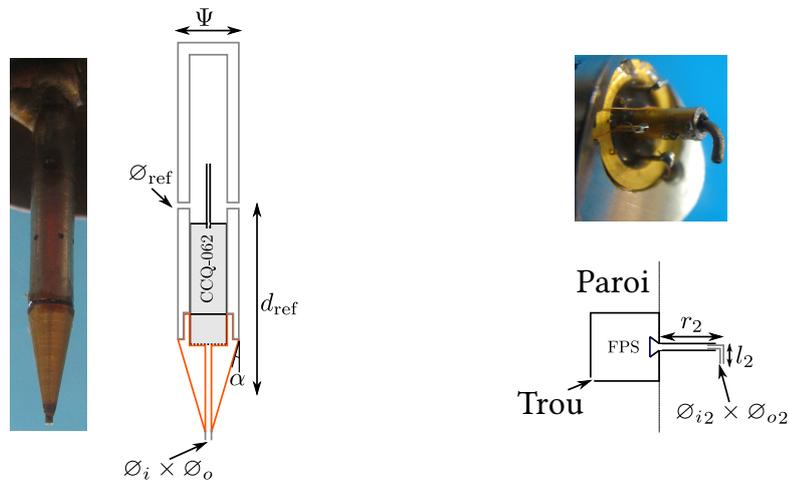


Fig 2.2 – Principaux capteurs à stagnation de pression. À gauche : capteur basé sur le transducteur Kulite (capteurs ① et ③). À droite : capteur basé sur le transducteur Fujikura (capteurs ② et ④).

Capteur				
N°	Marque transducteur	$\varnothing_i \times \varnothing_o$ [mm]	f_{res} [kHz]	Polarisation
①	Kulite	0.4×0.6	~ 2	AC
②	Fujikura	0.6×0.9	~ 2	AC
③	Kulite	0.4×0.6	~ 2	DC
④	Fujikura	0.6×0.9	< 1	AC

TABLE 2.2 – Principales caractéristiques des différents capteurs à stagnation de pression. \varnothing_i et \varnothing_o sont respectivement les diamètres intérieur et extérieur du nez. f_{res} est la fréquence de résonance de Helmholtz du capteur. « AC » : polarisation à l'aide d'une porteuse alternative. « DC » : polarisation à l'aide de piles (tension continue).

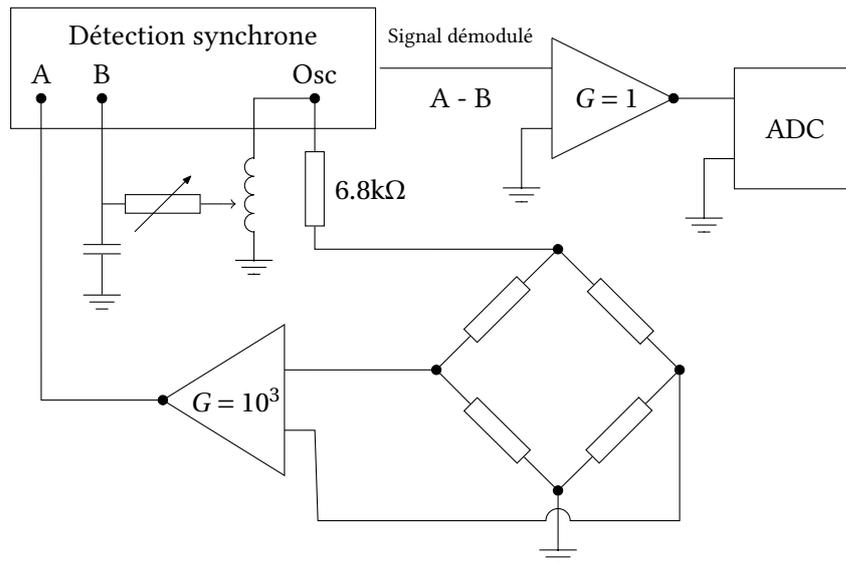


Fig 2.3 – Schéma électronique du système d'acquisition utilisé pour les capteurs ① et ②. Le transducteur de pression est représenté par un pont de résistances. Le déséquilibre est préamplifié par un amplificateur d'instrumentation bas bruit (JFET, bruit d'entrée en tension typique $1 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$). La valeur moyenne du déséquilibre est retranchée à l'aide d'un pont d'inductance et d'un filtre RC ajustable pour compenser le déphasage.

a été obtenu avec le capteur ① dans la conduite « Toupie » décrite ultérieurement (voir chapitre 3). Le pic de Helmholtz autour de 2 kHz est intense et bien défini. On s'aperçoit que la dynamique du signal est limitée à cause de la présence d'un pic très large autour de 600 Hz dont on cherche à comprendre l'origine.

Pour cela, on a commencé par « écouter » le signal en l'envoyant sur le haut-parleur. Il est alors apparu que le « bruit » obtenu était très proche des vibrations que l'on pouvait entendre pendant l'expérience en collant l'oreille (ou un stéthoscope) sur la structure du cryostat et évoquait le bruit des roulements à bille de l'axe de la pompe centrifuge.

Pour confirmer cette hypothèse, on filtre le signal du capteur avec un passe-bande 300 Hz – 1,6 kHz afin de ne garder que le bruit puis on calcule l'amplitude sur des fenêtres glissantes de largeur 10 ms. Le signal obtenu correspond à l'amplitude de la vibration parasite en fonction du temps. L'analyse en fréquence de ce battement est tracée sur la figure 2.5. Elle montre que la fréquence de battement du pic parasite correspond à la fréquence de rotation du moteur, ce qui conforte quantitativement l'impression laissée par l'écoute du signal sur le haut-parleur.

Ce résultat a été choisi pour souligner le défaut principal de ce type de capteur : ce sont essentiellement des microphones. Par conséquent, ils sont sensibles aux perturbations acoustiques présentes dans le système. Pour remédier à ce problème, on peut penser à plusieurs solutions :

- éviter au maximum les sources de bruit : utiliser un lubrifiant sec dans les roulements à bille cryogéniques, découpler le capteur et la structure, ajouter des absorbeurs de vibrations ;
- rendre le capteur à stagnation de pression le plus différentiel possible en cherchant à diminuer le temps de réponse de la face arrière (bruit acoustique seulement) ;
- concevoir un nouveau capteur de vitesse qui fonctionne en He I et en He II et qui ne soit pas un microphone.

L'effet du temps de réponse de la face arrière a été confirmé par les expériences menées au CEA dans l'expérience « HeJet » [Dur11b]. Par ailleurs, les modifications seront mise en œuvre dans la soufflerie

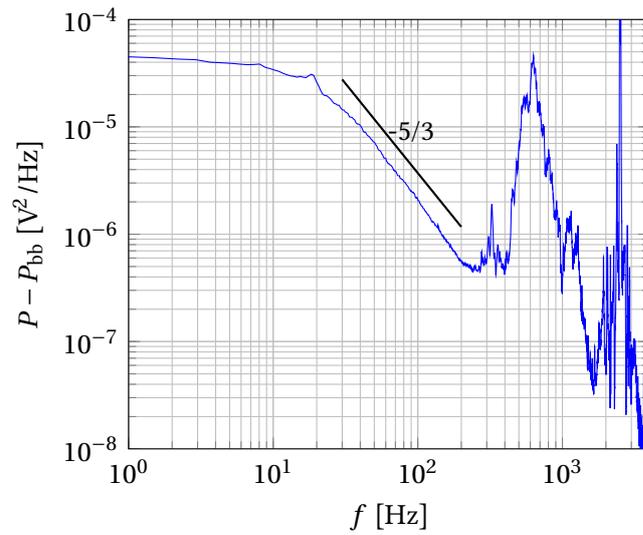


Fig 2.4 – Spectre de puissance obtenu avec le capteur ① dans la conduite « Toupie »

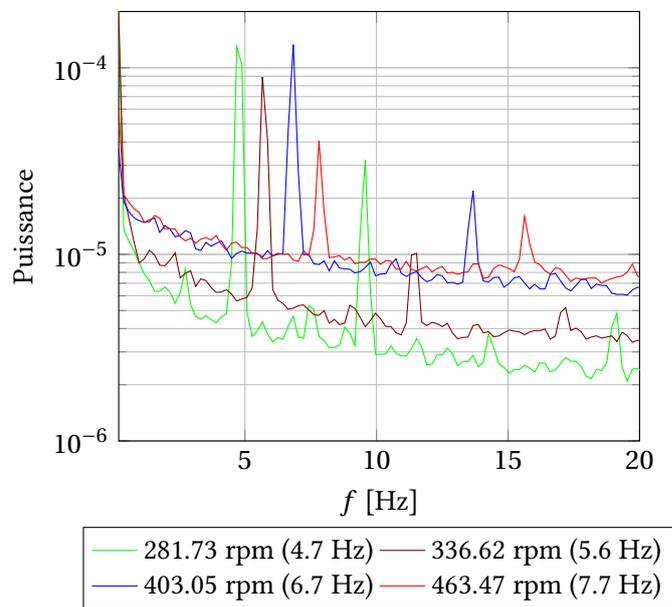


Fig 2.5 – Fréquence de battement du pic parasite mesuré par les capteurs à pression de stagnation dans l'expérience « Toupie »

Toupie pour diminuer les perturbations acoustiques à l'origine du pic autour de 600 Hz.

2.2.4 Limites de miniaturisation

Les capteurs obtenus avec cette technique sont les plus petits jamais utilisés avec succès dans l'hélium II. Ils ont permis d'obtenir des résultats physiques nouveaux (voir chapitre 3). Cependant, pour aller plus loin, il est nécessaire de résoudre des échelles plus petites. Pour cela, il faudrait pouvoir diminuer encore la taille des capteurs de vitesse.

Cependant, cela ne semble pas possible avec la technique utilisée jusqu'à présent. En effet, la sensibilité diminue lorsque la taille de la membrane diminue, alors que la sensibilité nécessaire augmente si l'on veut résoudre des échelles plus petites. En effet, le spectre de puissance décroît en $k^{-5/3}$. Par conséquent, les fluctuations à une échelle 10 fois plus petite auront une amplitude typiquement 7 fois plus faible. Donc si on pouvait diminuer la taille du capteur d'une décade, il faut aussi en augmenter la sensibilité d'un facteur 7.

Pour aller plus loin dans la miniaturisation, il est donc nécessaire de changer de technique, notamment trouver des alternatives aux transducteurs à membrane.

TUBES DE PITOT MINIATURES

- Capteurs de vitesse les plus petits pour l'hélium II à ce jour
- Dynamique jusqu'à 2 kHz
- Sensibles aux perturbations acoustiques
- Difficiles à miniaturiser en dessous de 500 μm

2.3 Anémomètre à micro-poutrelle

2.3.1 Principe

Il s'agit d'un capteur de vitesse microfabriqué basé sur la déflexion d'une poutrelle par l'écoulement incident (figure 2.6). Cette approche a été menée avec succès dans l'air et dans l'eau par Barth et collaborateurs en 2005 [Bar05] en utilisant une méthode de détection optique de la déflexion et une micro-poutrelle de longueur $\ell = 160\mu\text{m}$, de largeur $w = 30\mu\text{m}$ et d'épaisseur e comprise entre 1 μm et 3 μm .

Pour adapter cette technique à l'hélium cryogénique, nous avons décidé d'utiliser une détection basée sur un micro-résonateur supraconducteur en niobium ($T_c \approx 9\text{K}$), en éléments concentrés (*lumped element*), d'une technologie proche de celle utilisée dans les des caméras millimétriques NIKA développées dans le laboratoire par l'équipe d'Alessandro MONFARDINI [Doy08 ; Mon10]. Ce type de résonateur est constitué d'une capacité inter-digitée et d'un méandre inductif. On place la capacité inter-digitée sur la micro-poutrelle afin que l'élongation de la poutrelle conduise à une modification de capacité et donc de fréquence de résonance. Cette méthode de mesure a plusieurs avantages, notamment sa dynamique rapide, la méthode de micro-fabrication *a priori* simple et les perspectives de multiplexage de plusieurs micro-poutrelles le long d'une même ligne de mesure (par exemple pour réaliser des mesures de corrélation de vitesse).

2.3.2 Conception du capteur

On souhaite concevoir un ensemble micro-poutrelle et bras le moins invasif possible pour l'écoulement et une bague porte-capteur dédiée et compatible avec les dimensions des supports de capteur utilisés

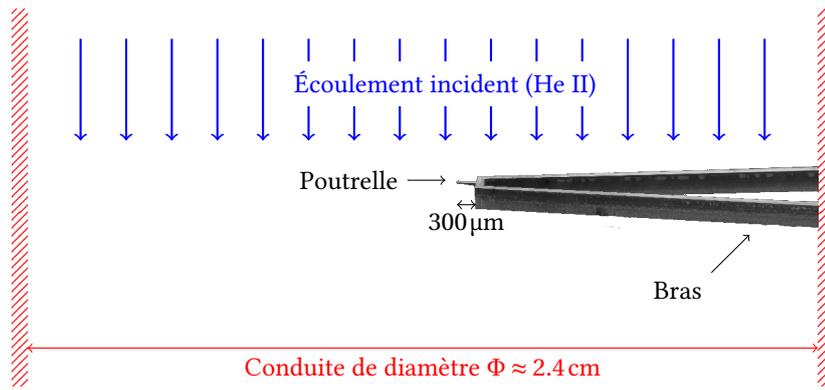


Fig 2.6 – Schéma de principe du capteur à micro-poutrelle placé dans une conduite.

pour la pince à second son et les tubes de Pitot.

Pour cela, nous avons décidé de micro-fabriquer la poutrelle et les bras en même temps à partir d'une même galette de silicium afin de pouvoir choisir les dimensions des bras les plus petites possibles. La figure 2.7 montre la largeur de l'objet que nous souhaitons réaliser : la partie évasée de largeur 3 mm s'insère dans une gorge sur la bague de support des capteurs. La longueur des bras est telle que la micro-poutrelle peut être placée au centre de la conduite du mini-circulateur ou à la moitié du rayon de la conduite « Toupie » (voir chapitre 3). La largeur des bras varie de 200 µm à la base à 150 µm à la pointe.

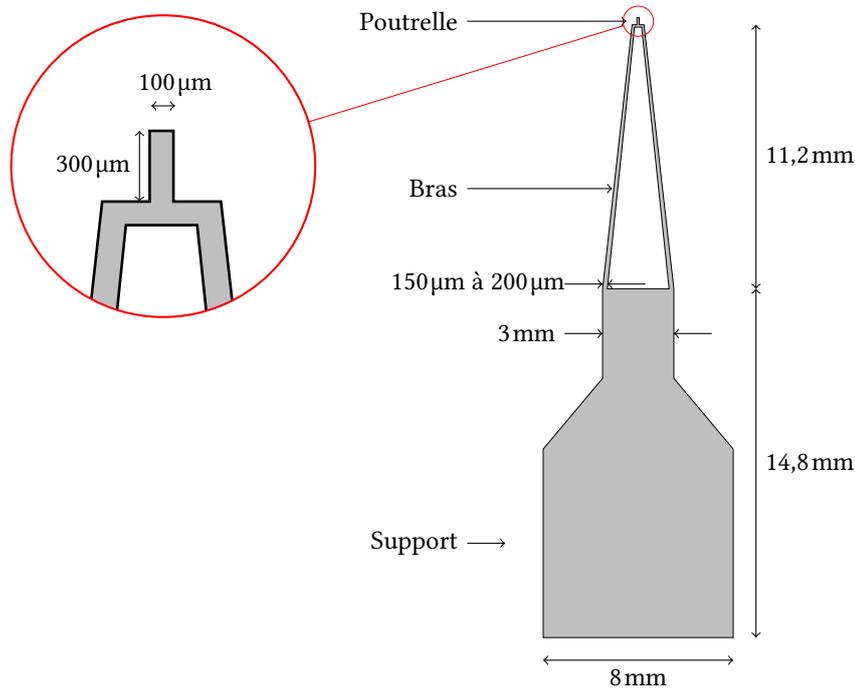


Fig 2.7 – Plan d'ensemble du capteur à micro-poutrelle sur son support

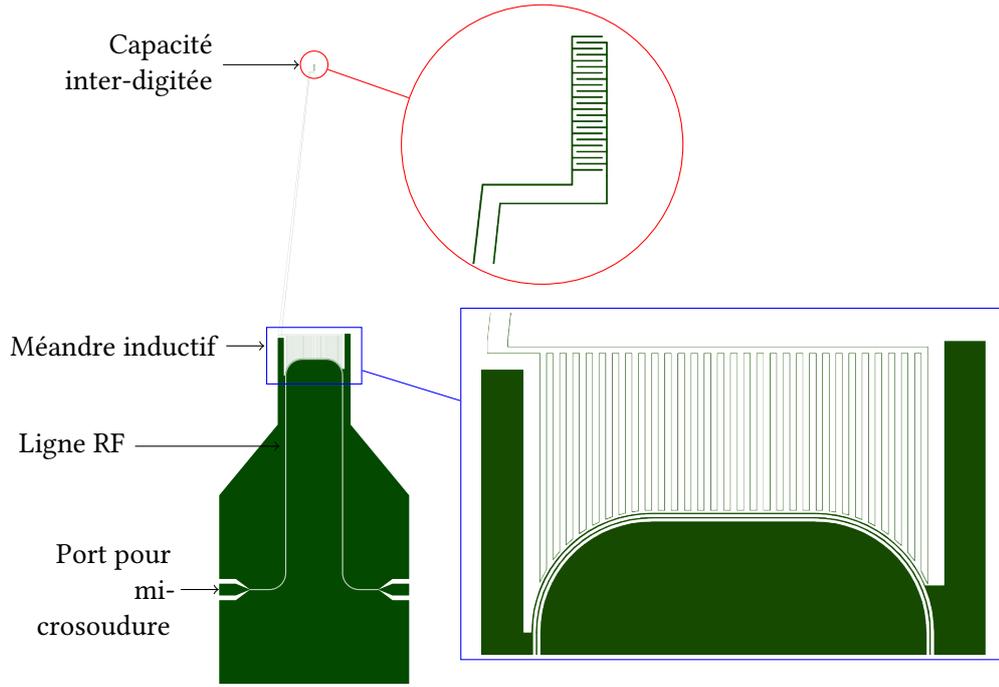


Fig 2.8 – Motif de la couche de niobium.

2.3.3 Déflexion de la micro-poutrelle

On considère une poutre flexible de dimension $\ell \times w \times e$, encadrée à une extrémité et soumise à une pression uniforme P sur une des faces. La déflexion de la pointe s et la déflexion angulaire θ sont données par,

$$s = \frac{\ell^3 P \ell w}{8 EI} \text{ et } \theta_{\max} = \frac{\ell^2 P \ell w}{6 EI} \quad (2.12)$$

où E est le module de Young de la poutrelle et $I = \frac{1}{12} w e^3$ est le moment d'inertie. L'élongation relative de la poutrelle peut alors s'écrire,

$$\frac{\Delta \ell}{\ell} \sim \frac{P \ell^2}{E e^2} \quad (2.13)$$

On peut estimer la pression P au niveau de la poutre comme,

$$P = \frac{1}{2} c_d(v) \rho v^2 \quad (2.14)$$

où $c_d(v)$ est le coefficient de traînée et ρ est la densité du fluide.

Dans le cas d'un fluide classique, la dépendance du coefficient de traînée $c_d(v)$ dépend du nombre de Reynolds (voir figure 2.9 pour le cas d'une sphère). Dans le cas de la micro-poutrelle dans l'hélium I, le nombre de Reynolds typique, Re_ℓ vaut,

$$Re_\ell = \frac{\ell \langle v \rangle}{\nu} \sim 10^4 \quad (2.15)$$

avec $\ell = 300 \mu\text{m}$, $\nu = 2,6 \times 10^{-8} \text{m}^2/\text{s}$ et $\langle v \rangle = 1 \text{m/s}$. La dépendance exacte dépend de la géométrie de l'objet. Dans cette gamme de nombre de Reynolds, le coefficient de traînée pour une sphère ne dépend pas sensiblement de la vitesse.

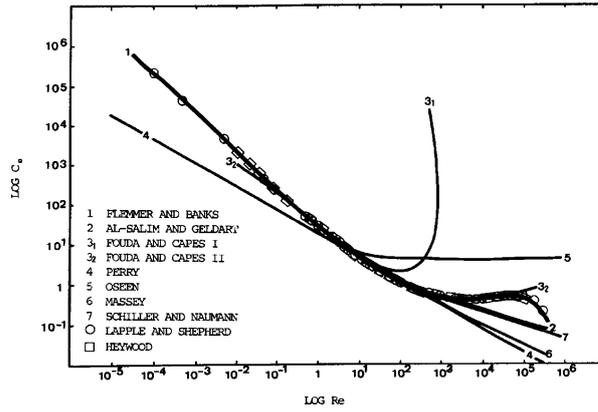


Fig 2.9 – Dépendance du coefficient de traînée en fonction du nombre de Reynolds. Pour $Re < 10^3$: régime visqueux, $c_d(Re) \approx \frac{24}{Re}$. Dans la gamme $Re \approx 10^4$: régime sous-critique, $c_d(Re) \approx cte$. Pour $Re > 10^5$: transition vers le régime turbulent. Source : Flemmer & Banks (1986) [FB86]

En ce qui nous concerne, le capteur sera utilisé dans l'hélium superfluide donc on ne fera pas d'hypothèse sur c_d . La mesure de la déflexion de la poutrelle s ou de l'élongation relative $\frac{\Delta \ell}{\ell}$ conduit à une mesure de la vitesse v moyennée sur la surface de la poutrelle. Mais on s'attend *a priori* à un étalonnage non linéaire. On peut néanmoins estimer un ordre de grandeur pour l'élongation relative avec $c_d = O(1)$, $\rho = 145 \text{ kg/m}^3$ et $v = 1 \text{ m/s}$ pour une poutrelle en silicium de module de Young $E = 130 \text{ GPa}$, de longueur $\ell = 300 \mu\text{m}$ et d'épaisseur $e = 1 \mu\text{m}$,

$$\left. \frac{\Delta \ell}{\ell} \right)_{\text{estimé}} \approx 5 \times 10^{-5} \quad (2.16)$$

Cette estimation est assez petite. Cela signifie qu'il faudra une technique de mesure très sensible.

Technique de mesure

Comme nous l'avons indiqué, la mesure de l'élongation de la poutrelle est réalisée à l'aide du résonateur à éléments concentrés (« lumped element ») en niobium (supraconducteur pour $T < T_c \approx 9 \text{ K}$), constitué d'une capacité inter-digitée et d'un méandre inductif. Ce type de résonateur supraconducteur est développé depuis plusieurs années pour l'astrophysique par l'équipe d'Alain Benoît, Alessandro Monfardini et collaborateurs et sont donc bien connus. Les facteurs de qualité usuels sont de l'ordre de 10^5 à 10^6 .

Le circuit réel, déposé sur silicium, est relié à l'extérieur par des fils en aluminium micro-soudés. Ces soudures introduisent des impédances parasites. D'après les études précédentes menées à Grenoble [Gra08], l'ensemble du circuit peut être modélisé par une impédance complexe Z_{res} connectée à une source et un détecteur adaptés ($Z_0 = 50 \Omega$) à travers des réactances parasites X_1 et X_2 (liées aux fils de micro-soudure). L'impédance Z_{res} inclut la capacité de couplage entre le résonateur et la ligne RF en plus de l'impédance intrinsèque du résonateur.

La transmission du système S_{21} s'écrit,

$$S_{21} = \frac{2Z_{\text{res}}Z_0}{Z_{\text{res}}(2Z_0 + j(X_1 + X_2)) + (Z_0 + jX_1)(Z_0 + jX_2)} \quad (2.17)$$

avec,

$$Z_{\text{res}} = \frac{Z_0 Q_e}{2Q_i} \left(1 + 2jQ_i \frac{f - f_0}{f_0} \right) \quad (2.18)$$

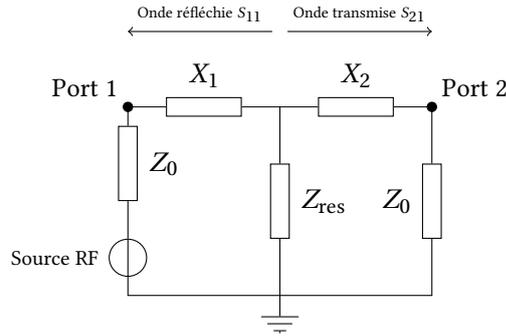


Fig 2.10 – Schéma électrique équivalent du résonateur RF. On mesure la transmission du port 1 vers le port 2, notée S_{21} .

où Q_i est le facteur de qualité intrinsèque du résonateur, Q_e est le facteur de qualité externe dû au couplage avec l'électronique de mesure, $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ est la fréquence de résonance du résonateur.

Pour ce qui nous concerne, on projette de placer la capacité inter-digitée sur la micro-poutrelle et le méandre inductif sur le support (en dehors de l'écoulement) et on cherche à mesurer les fluctuations de capacités du circuit, reliées à l'élongation de la poutrelle¹. Comme $\Delta\ell \ll \ell$, on peut écrire la capacité au premier ordre,

$$C = C_0 \left(1 - \frac{\Delta\ell}{\ell}\right) \quad (2.19)$$

et donc la fréquence de résonance f_0 s'écrit,

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}} \left(1 + \frac{\Delta\ell}{2\ell}\right) \quad (2.20)$$

ce qui conduit à réécrire l'équation 2.18 comme,

$$Z_{res} = \frac{Z_0 Q_e}{2Q_i} \left(1 + 2jQ_i \left(2\pi f \sqrt{LC_0} \left(1 - \frac{\Delta\ell}{2\ell}\right) - 1\right)\right) \quad (2.21)$$

Il s'agit alors de mesurer $S_{21}(t)$ (à une fréquence donnée proche de f_0) car d'après les équations 2.17 et 2.21,

$$S_{21}(t) = \alpha + \beta \frac{\Delta\ell}{\ell} \quad (2.22)$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sont deux constantes.

Validation de la géométrie et des matériaux

On choisit un circuit en niobium, dessiné sur le même principe qu'un pixel de caméra millimétrique du projet NIKA [Mon10] : il s'agit d'une matrice de pixels. Chaque pixel est constitué d'un résonateur à éléments concentrés (l'inductance est réalisée à l'aide d'un méandre et la capacité à l'aide de doigts en regard). Pour adapter ce circuit, on déforme un pixel de façon à ce que l'inductance se trouve en dehors de l'écoulement et la capacité sur la poutrelle, de sorte que la distance entre les « doigts » varie lorsque la poutrelle est déformée (voir figure 2.8). Le nombre de méandres et le nombre de doigts doivent

1. Cette mesure est sensible également aux fluctuations de constante diélectrique de l'hélium [Gra08] produites par la compression du fluide au point d'arrêt. Si on suppose que cette compression est isenthalpique, on peut calculer $\Delta\epsilon/\epsilon$ et comparer sa valeur à $\Delta\ell/\ell$. On trouve $\Delta\epsilon/\epsilon \approx 5 \times 10^{-7} \ll \Delta\ell/\ell$, ce qui confirme *a priori* que la mesure est sensible à l'élongation de la poutrelle et pas à la fluctuation locale de densité.

être maximisés afin d'avoir une fréquence de résonance la plus basse possible et une sensibilité la plus grande possible. Les lignes qui relient l'inductance et la capacité seront dessinées sur le même bras et la longueur réduite au maximum afin de diminuer la surface d'antenne susceptible de capter du bruit électromagnétique ambiant.

Les résonateurs utilisés jusqu'à présent à Grenoble étaient relativement compacts car le but était de réaliser des pixels. Il convient d'abord de valider la géométrie « éclatée » dans laquelle le méandre et la capacité inter-digitée sont éloignés. Et par ailleurs, il faut avoir une idée du nombre de doigts et de méandres nécessaires. Pour cela, on commence par simuler une géométrie simplifiée à l'aide du logiciel « Sonnet ». Il permet de connaître le champ électrique et la densité de courant en chaque point du circuit pour vérifier que le circuit se comporte correctement. Le schéma simulé et la courbe de transmission obtenus sont tracés sur la figure 2.11. Ces simulations ont permis de valider le principe du circuit éclaté.

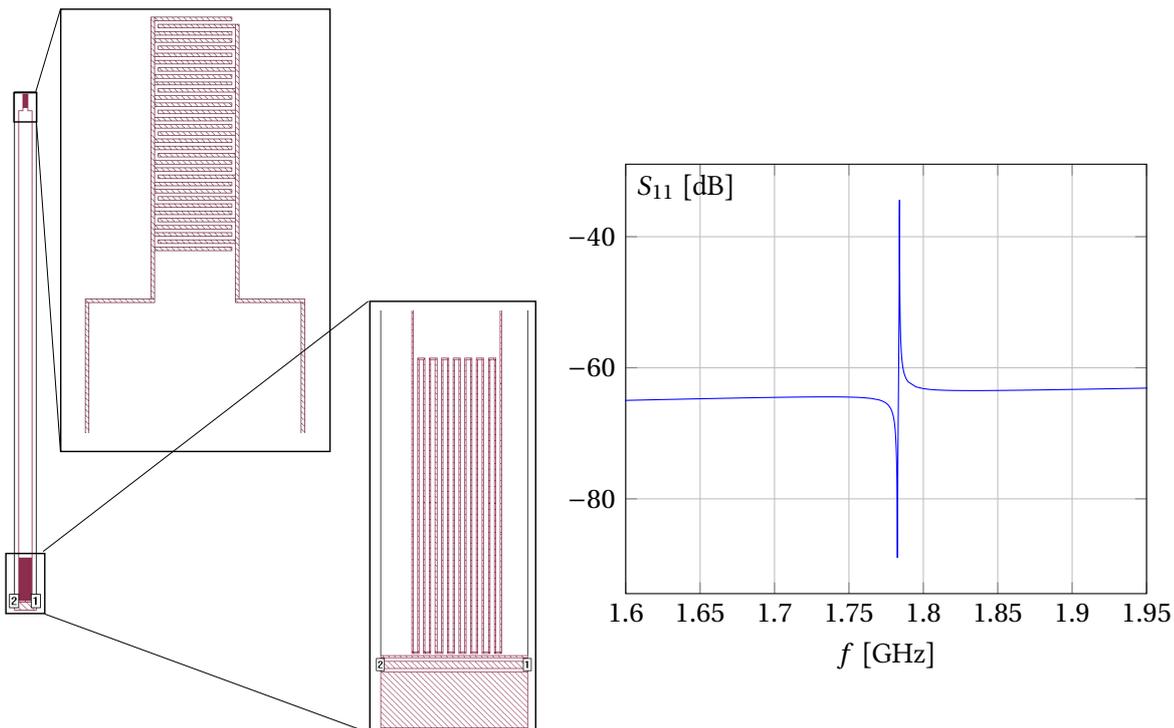


Fig 2.11 – Simulation préliminaire de la géométrie du circuit RF réalisée avec le logiciel « Sonnet ».

Plusieurs campagnes expérimentales ont également été menées pour (i) valider la forme du circuit et vérifier l'influence du nombre de doigts et de méandres et (ii) contrôler la qualité du niobium obtenu par pulvérisation cathodique (Nordiko 2550) à la Plateforme Technologie Amont (PTA) de Grenoble. En effet, jusqu'à présent, les résonateurs réalisés dans l'équipe pour les applications astrophysiques ont toujours utilisé une couche de niobium obtenue dans une machine dédiée à l'IRAM². Il n'était pas garanti que la qualité du niobium de la PTA soit équivalente et permette d'obtenir les mêmes facteurs de qualité. La résonance obtenue (figure 2.12) est satisfaisante et permet de valider le niobium obtenu.

2. Institut de Radioastronomie Millimétrique

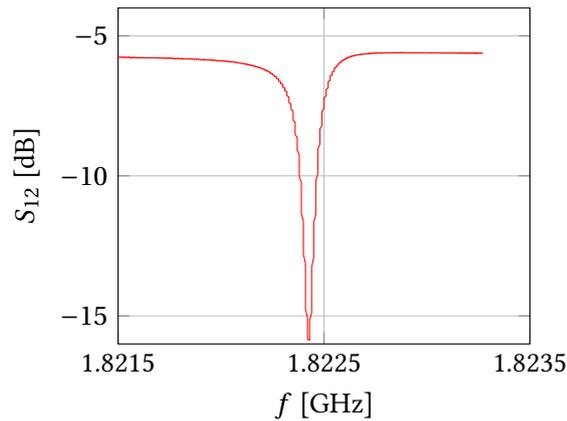


Fig 2.12 – Mesure de la transmission d’un résonateur de type « pixel » réalisé avec une couche de niobium déposée par pulvérisation cathodique à la PTA.

Technologie de fabrication

On peut envisager deux grands types de technologie pour fabriquer cet ensemble support et micro-poutrelle :

- Gravure avec couche d’arrêt. Micro-poutrelle en Si_3N_4 , SiO_2 ou basée sur une galette SOI
Avantages : épaisseur ajustable facilement
Inconvénients : contraintes résiduelles (sauf pour le SOI)
- Gravure sans couche d’arrêt. Micro-poutrelle mono-cristalline.
Avantages : Pas de contraintes résiduelles, solide
Inconvénients : épaisseur difficile à contrôler, homogénéité spatiale

La technologie de mesure envisagée, basée sur un résonateur supraconducteur à très grand facteur de qualité, interdit la présence de diélectrique désordonné sous la couche de niobium. Par conséquent, on rejette le premier type de technologie à base d’une couche diélectrique amorphe. La micro-poutrelle sera donc gravée directement dans une galette de silicium monocristallin.

Les choix finaux sont les suivants : l’ensemble du procédé est réalisé à Grenoble à la Plateforme Technologie Amont (PTA) à partir d’une galette de silicium haute résistivité³ d’orientation cristallographique⁴ $\langle 1,0,0 \rangle$ et d’épaisseur $350 \mu\text{m}$:

- Circuit de mesure en niobium ($T_c \approx 9\text{K}$)
 1. Dépôt par pulvérisation cathodique (Nordiko 2550)
 2. Photo-lithographie UV (résine AZ-1512HS et aligneur MJB4)
 3. Gravure par ICP RIE fluorée⁵
- Gravure profonde de la structure
 1. Procédé Bosch (STS)
 2. Masques double-face en aluminium⁶

3. La valeur précise de la résistivité n’a pas beaucoup d’importance car tous les porteurs sont gelés à 4,2 K. En revanche, l’utilisation de silicium haute résistivité permet de tester la continuité de la ligne en niobium à température ambiante (sinon la ligne serait court-circuitée par le silicium.)

4. Il n’est pas clair si cette orientation est importante. Les essais avec des orientations $\langle 1,1,1 \rangle$ ont conduit au clivage des galettes dans la machine de gravure. Il est possible qu’une orientation malheureuse des plans cristallins conduisent à cliver la galette le long des bras des capteurs.

5. 9 sccm de SF_6 , 28 sccm de C_4F_8 et 60 sccm d’argon pendant 1 min 30

6. Dépôt par pulvérisation cathodique (Nordiko 2550) ou par évaporation (Plassys)

Méthode de contrôle de l'épaisseur

En l'absence de couche d'arrêt, il faut trouver une méthode pour contrôler l'épaisseur de la poutrelle. Pour cela, on décide d'utiliser l'hélium de refroidissement de la machine de gravure profonde comme indicateur de fin d'attaque (voir figure 2.13 pour un schéma de la machine de gravure). En effet, lors de la gravure, la galette est refroidie par une circulation d'hélium gazeux maintenu à 10 °C. La pression de gaz de refroidissement est réglée à 1 Torr⁷. Le débit moyen est de l'ordre de 15,7 sccm⁸. En cas de défaut d'étanchéité du système, le gaz de refroidissement peut fuir vers le plasma : un débit plus important sera alors nécessaire pour maintenir la pression à 1 Torr. Lorsque le débit dépasse un certain seuil (c'est-à-dire lorsque la fuite est trop importante), la machine se met en « alerte » et la gravure s'arrête.

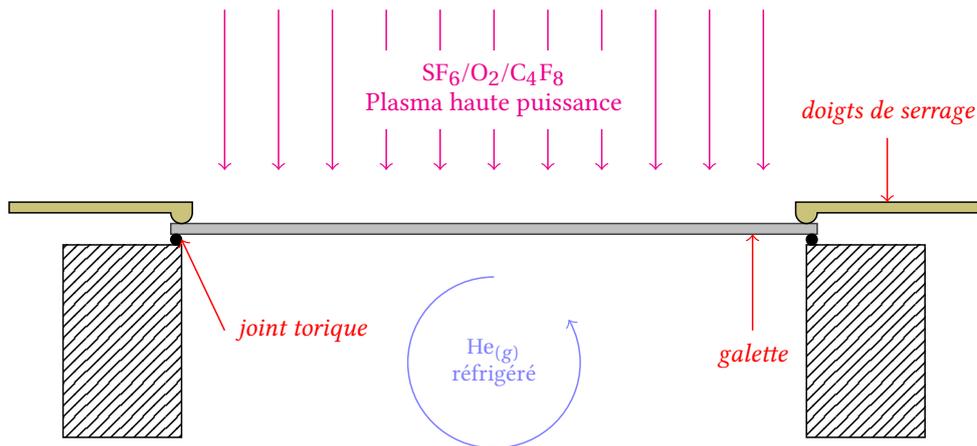


Fig 2.13 – Schéma de la galette dans la machine de gravure profonde.

L'idée est alors d'utiliser ce mécanisme comme indicateur de fin d'attaque : on effectue une « pré-gravure » de l'autre côté de la galette avant de graver la poutrelle, de façon à créer une fuite lorsque la poutrelle a l'épaisseur désirée (voir figure 2.14). En pratique, on arrête la machine dès que le débit d'hélium de refroidissement dépasse 16 sccm.

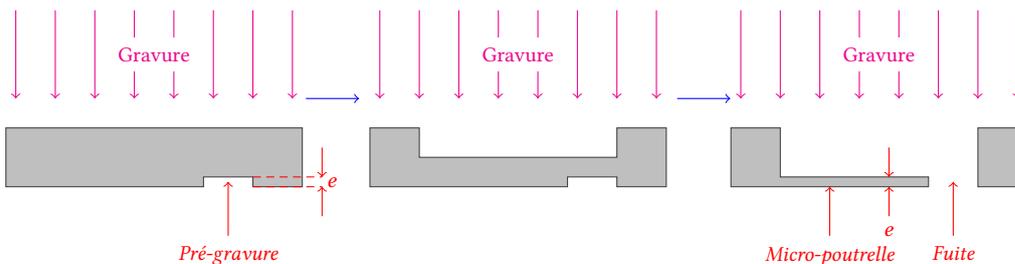


Fig 2.14 – Méthode de contrôle de l'épaisseur de la micro-poutrelle. La profondeur e de la pré-gravure contrôle l'épaisseur finale de la micro-poutrelle.

Parmi les problèmes pratiques que nous avons rencontrés, deux nécessitent une attention particulière :

- Lorsque la galette est placée directement dans la machine, les doigts de serrage imposent une contrainte qui peut conduire à cliver la galette si on grave des tranchées de grande longueur ;

7. 1 Torr = 1 mmHg = 133,322 Pa

8. Standard Cubic Centimeters per Minute

- Lorsque la galette est collée sur un support (ce qui est nécessaire si une partie est déjà percée), le refroidissement est moins efficace. Lorsque la température augmente trop, le polymère téflon qui protège les flancs dans le procédé Bosch peut être dégradé et la gravure perd son anisotropie.

Nous avons résolu le premier problème en choisissant les étapes de gravures de façon à ce qu'il ne soit pas nécessaire de graver de grandes tranchées lors de la première étape. Le second problème est toujours partiellement ouvert mais semble être nettement diminué en utilisant un matériau adapté pour coller la galette sur le support (CrystalBond 555).

Photolithographie

Le procédé final utilise trois masques pour photolithographie (figure 2.15) : les masques « Face avant » et « Face arrière » permettent de préparer les couches d'aluminium (avant et arrière) utilisées comme masque dans la machine de gravure profonde et le masque « Résonateur » permet de réaliser le circuit en niobium. Pour ce dernier, on utilise un motif en chrome sur une plaque en quartz de 5 pouces (MFS 4SL NoI chez *Toppan Photomasks*) car le circuit nécessite une résolution élevée. Pour les autres masques, j'ai travaillé essentiellement avec des films en plastique (film en 3000 lignes chez *Laser-Technologie*) mais l'utilisation d'un masque en chrome permet d'obtenir des contours plus francs.

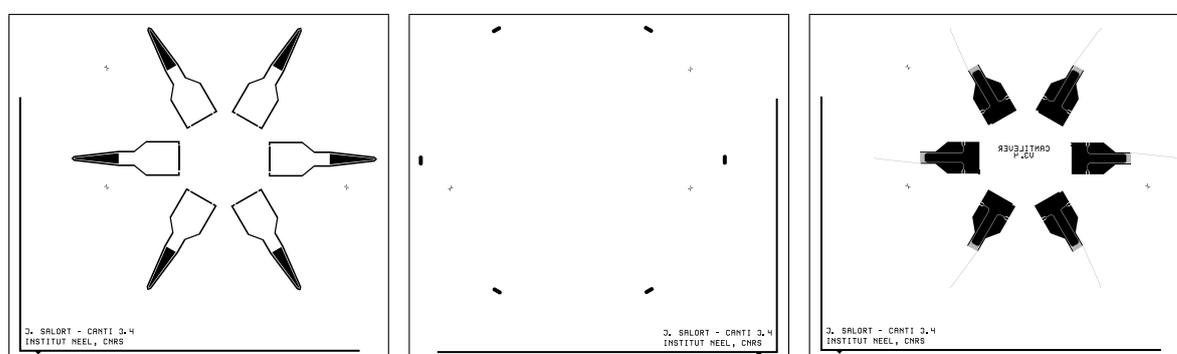


Fig 2.15 – Masques utilisés pour la micro-fabrication du capteur à micro-poutrelle (taille réelle 5 pouces). De gauche à droite : Masque « Face avant », Masque « Face arrière » et Masque « Résonateur ». Le coin permet d'aligner approximativement les motifs de la face avant et de la face arrière à l'aide du méplat de la galette. Les petites croix permettent l'alignement précis des deux motifs de la face avant (avec l'aligneur MJB4) et éventuellement du motif de la face arrière avec l'aligneur double-face MA-150 (facultatif).

Le procédé complet

— Galette de départ —

Étape 0

Galette Si
 $\langle 1,0,0 \rangle - 350 \mu\text{m}$



— Préparation de la face avant —

Étape 1

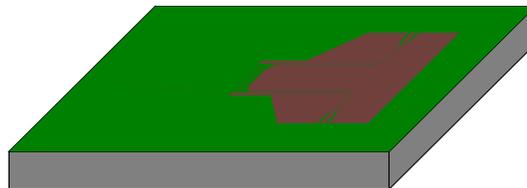
— Face Avant —
 Dépôt Nb (environ 2200 Å)
Pulvérisation cathodique
Nordiko 2550

**Étape 2**

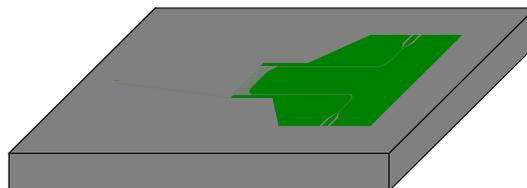
— Face avant —
 Dépôt Résine (positive)
AZ 1512HS

**Étape 3**

— Face avant —
 Photolithographie UV
 Masque "Résonateur"
MJB4 puis AZ Developer

**Étape 4**

— Face avant —
 Gravure fluorée (SF_6)
ICP RIE (programme @Si-anis)

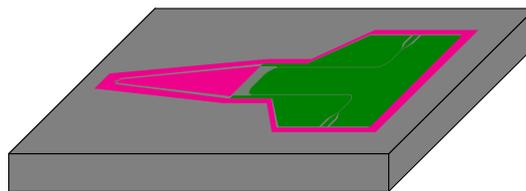
**Étape 5**

— Face avant —
 Dépôt Résine (positive)
AZ 1512HS



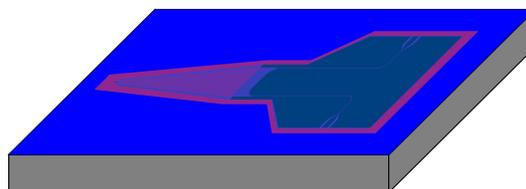
Étape 6

– Face avant –
Photolithographie UV
Masque “Face avant”
MJB4 puis AZ Developer



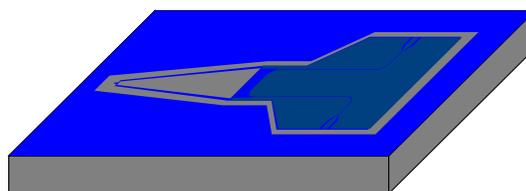
Étape 7

– Face avant –
Dépôt Al (environ 2000 Å)
Pulvé ou Évap



Étape 8

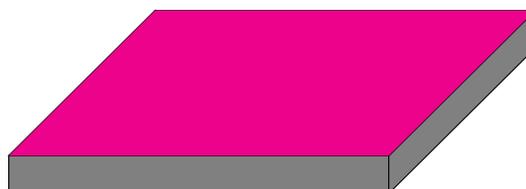
– Face avant –
Lift-off
Acétone sous ultra-sons



– Préparation de la face arrière –

Étape 9

– Face arrière –
Dépôt Résine (positive)
AZ 1512HZ



Étape 10

– Face arrière –
Photolithographie UV
Masque “Face arrière”
MJB4 puis AZ Developer



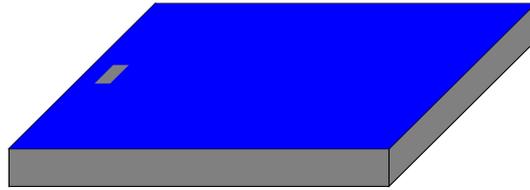
Étape 11

– Face arrière –
Dépôt Al
Pulvé ou Évap

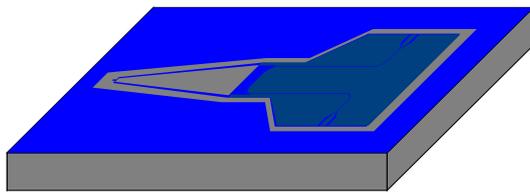


Étape 12

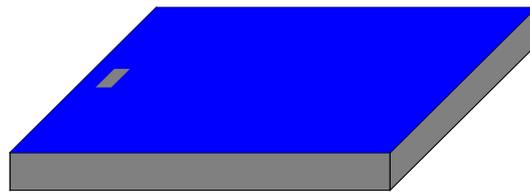
— Face arrière —
Lift-off
Acétone sous ultra-sons



— Gravure du micro-système —
Attaque fluorée (SF_6 , C_4F_8 et O_2)
Deep RIE (procédé Bosch)
Masque en Al



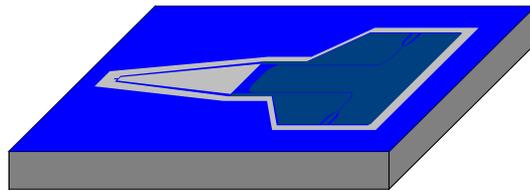
Face avant



Face arrière

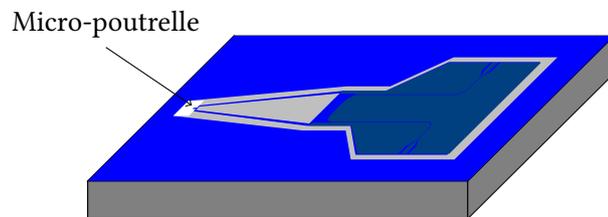
Étape 13

— Face avant —
Pré-attaque pour définir
l'épaisseur de la poutrelle
Process Large (1 cycle, 13 s)



Étape 14

— Face arrière —
Gravure sur toute l'épaisseur
de la galette
Process Large (environ 150 cycles, 32 min)



Étape 15

— Face avant —
Gravure sur toute l'épaisseur
(Libération de la structure)
Process Large (collé sur support)

Étape 16

— Nettoyage —
Gravure de Al
Alu-etch

2.3.4 Le premier prototype

Le procédé décrit ci-dessus a permis d'obtenir le prototype de la figure 2.16. L'épaisseur de la poutrelle peut être estimée à partir de l'image obtenue par microscopie électronique en comptant les lignes horizontales sur les flancs. Ces lignes correspondent aux cycles gravure/passivation du procédé Bosch (« scalloping »). On trouve une épaisseur de l'ordre de $1\ \mu\text{m}$ à la pointe et de l'ordre de $10\ \mu\text{m}$ à la base.

Le montage du capteur est réalisé à l'aide d'une bague d'instrumentation dédiée en laiton, compatible à la fois avec le mini-circulateur de test et avec la conduite Toupie. Des connecteurs radiofréquences SMA étanches Huber+Suhner sont soudés à l'étain directement sur la bague (voir figure 2.17). On réalise des pistes en cuivre sur mesure⁹ déposées sur un diélectrique adapté (substrat Rogers RO3006, $\epsilon_r = 6,15 \pm 0,15$) afin de relier les connecteurs SMA aux ports pour micro-soudure du circuit en niobium. Ces pistes sont montées sur la bague avec une colle Silver-Epoxy conductrice afin de relier les plans de masse. Des micro-soudures en aluminium permettent enfin de relier la piste et les plans de masse. Le capteur en lui-même est collé avec quelques gouttes de vernis General Electric, de façon à ce que l'ensemble soit facilement démontable.

Électronique « directe »

Pour mesurer l'élongation de la poutrelle, il convient de mesurer la transmission $S_{21}(t)$ (voir équation 2.22). Pour cela, on envoie une onde radio-fréquence proche de la fréquence de résonance du résonateur et on démodule en multipliant l'onde d'origine et l'onde transmise à l'aide d'un mixer IQ. Le schéma électronique complet est précisé sur la figure 2.18.

La puissance de l'onde qui arrive sur le résonateur ne doit pas être trop grande pour ne pas détruire la supraconductivité et par conséquent la résonance. Un atténuateur (Inmet 18AH-20dB) et un amplificateur cryogénique (Miteq AFS3) sont installés dans le cryostat au niveau de l'écran thermique le plus bas (juste au dessus du bain). Des jeux d'atténuateurs (Mini-Circuits VAT-1+, VAT-3+, VAT-5+, VAT-10+ et VAT-20+) et d'amplificateurs (Mini-Circuits ZX60-1215LN) peuvent être montés à température ambiante pour ajuster la puissance et le gain. En pratique, on choisit les paramètres de telle sorte que la puissance qui arrive dans le résonateur soit légèrement inférieure au seuil auquel la résonance commence à se déformer. C'est dans ce domaine que la sensibilité est la plus élevée.

Ce sont les spécifications du Mixer IQ (Miteq IR0502LC1Q) qui imposent le plus de contrainte sur les puissances : il s'alimente par l'énergie envoyée sur l'entrée LO. En nominal, la puissance sur l'entrée LO doit être de l'ordre de $12\ \text{dBm}$ ¹⁰. La puissance sur l'entrée RF ne doit pas être trop élevée. On cherche à ce qu'elle soit entre $-10\ \text{dBm}$ et $0\ \text{dBm}$. Le splitter (ATM PNR P214H) est passif et dissipatif : pour une puissance d'entrée de $20\ \text{dBm}$, on mesure en sortie $9\ \text{dBm}$ sur chaque branche. Dans un premier temps, on utilise la source Agilent N9310A à $20\ \text{dBm}$ et le montage de la figure 2.18. La puissance sur l'entrée LO du mixer est inférieure à la puissance nominale mais la source ne permet pas une puissance plus élevée. L'utilisation d'un amplificateur RF de puissance (Mini-Circuits ZHL-2-12) avant l'entrée LO n'a pas amélioré la qualité du signal démodulé.

Limites du système

Hors écoulement et en balayant la fréquence générée par la source RF, on obtient la transmission S_{21} (figure 2.19). Elle présente des caractéristiques anormales en comparaison des résonances obtenues généralement pour ce type de résonateur, comme celle de la figure 2.12 :

- Forte dissymétrie ;

9. Les dimensions de la ligne en cuivre sont calculées pour obtenir une impédance de $50\ \Omega$ pour une fréquence de $1\ \text{GHz}$ à l'aide du logiciel *TXLine*.

10. $P_{\text{dBm}} = 10 \log \frac{P}{P_0}$ avec $P_0 = 1\ \text{mW}$

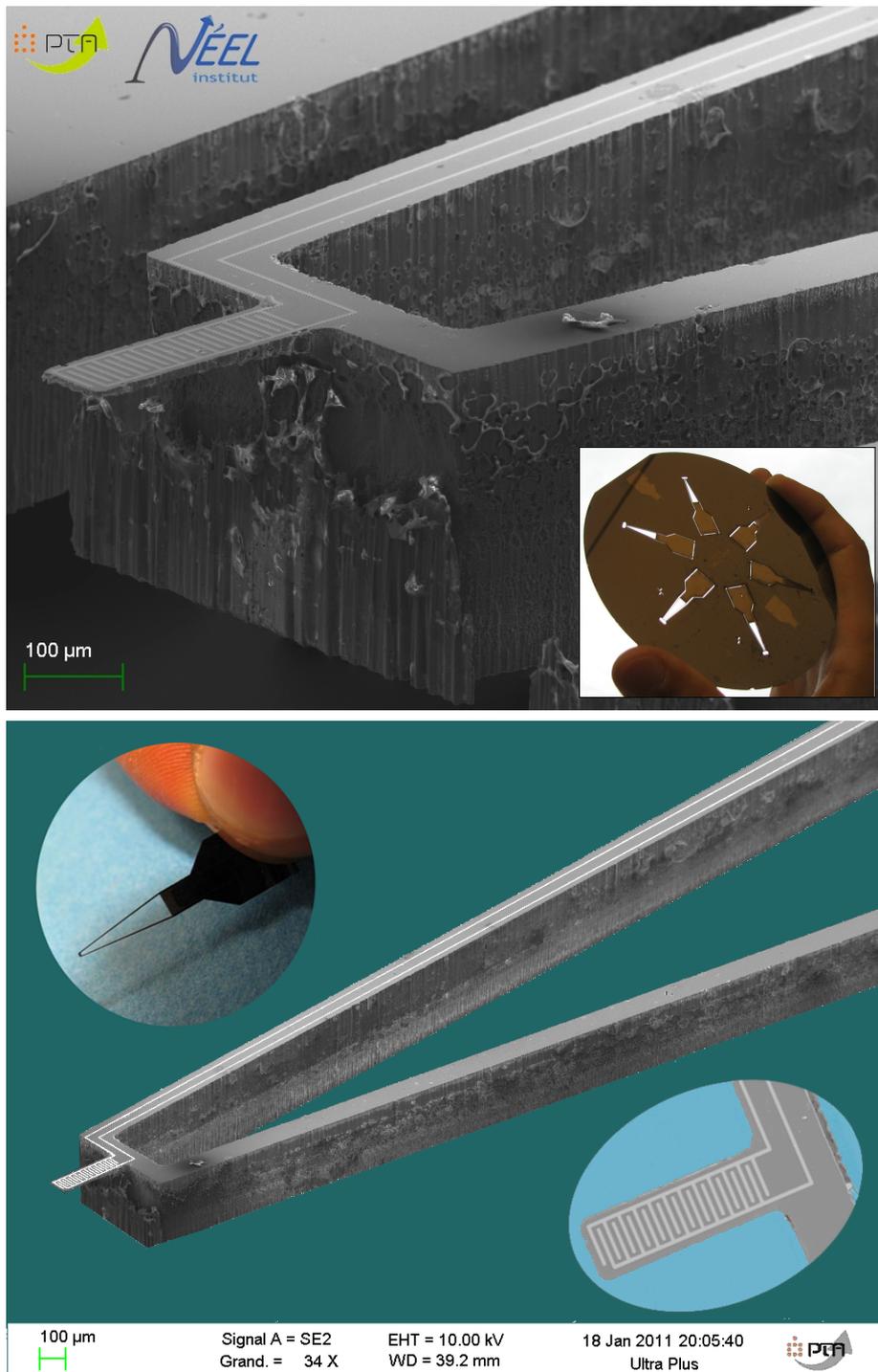


Fig 2.16 – Images de la micro-poutrelle obtenues au microscope électronique à balayage. Photographie de la galette de silicium gravée de part en part, avec six capteurs prêts à être clivés. Photographie d'un capteur à micro-poutrelle entre pouce et index.

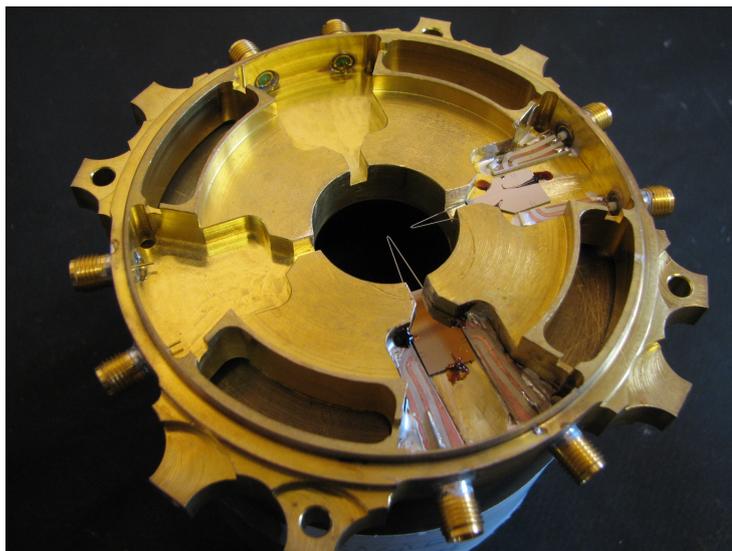


Fig 2.17 – Deux capteurs à micro-poutrelle montés sur la bague d'instrumentation. Cette bague est placée dans la conduite (le centre de la bague reconstruit les parois de la conduite). La vitesse moyenne de l'écoulement est dirigée de haut en bas sur l'image.

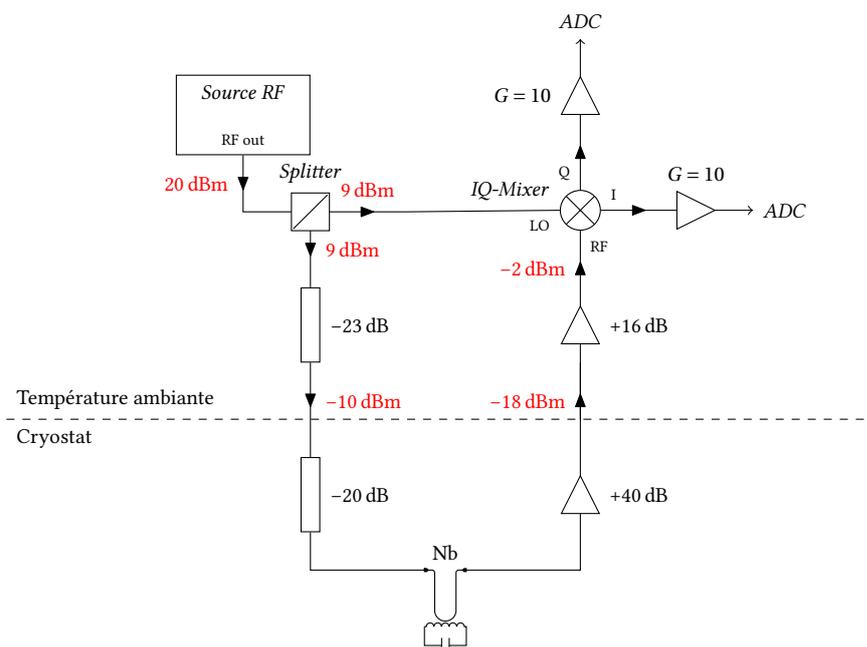


Fig 2.18 – Circuit électronique préliminaire pour la mesure de l'élongation de la micro-poutrelle. Les valeurs d'atténuation et de gain (en noir) correspondent aux indications constructeur. Les puissances (en rouge) sont les valeurs effectivement mesurées à l'aide d'un analyseur Agilent E4405B.

- Amplitude faible (moins de 1 dB) ;
- Facteur de qualité intrinsèque de l'ordre de 10^3 .

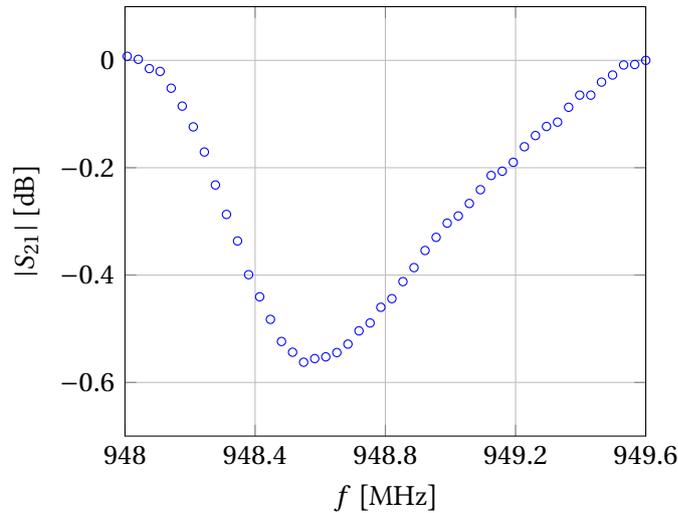


Fig 2.19 – Réponse du résonateur déposé sur la micro-poutrelle, mesurée avec l'électronique de la figure 2.18.

La dissymétrie est probablement liée aux inductances parasites des micro-soudures. Il a été constaté par le passé que cette dissymétrie est amplifiée lorsque le couplage ligne/résonateur est fort (voir la dernière figure de [Doy08]). Dans notre cas, le couplage est très important (faible distance entre la ligne et le résonateur). Compte tenu de la faible amplitude obtenue, ce fort couplage s'est néanmoins révélé *a posteriori* indispensable : il est probable que la résonance aurait été impossible à mesurer avec un couplage plus faible.

L'explication la plus probable pour expliquer l'amplitude et le facteur de qualité faibles est la pollution à l'aluminium sur le résonateur révélée par l'analyse EDS-X¹¹ (voir figure 2.20). Ce dernier, non-supraconducteur à la température de travail, introduit de la dissipation, ce qui détruit la résonance.

Néanmoins, malgré le facteur de qualité faible, on enregistre un signal $S_{21}(t)$ lorsque la micro-poutrelle est soumise à un écoulement incident (figure 2.21). Le spectre de puissance obtenu révèle plusieurs sources de bruit :

- Bruit basse-fréquence (pour $f < 1$ kHz) ;
- Nombreux pics assez fin dans la gamme 2 kHz – 100 kHz

L'analyse détaillée des différents composants a permis de déterminer que le bruit basse fréquence provient de la source RF (Agilent N9310A). Le niveau baisse fortement (plus d'une décade à 1 Hz) en utilisant une source avec un bruit de phase plus faible (notamment Rohde & Schwarz SMA-100X ou Agilent E8257D).

Une simulation par éléments finis réalisée par le SERAS (Vincent ROGER et Philippe JEANTET) indique, par ailleurs, que les pics observés dans la gamme $f > 2$ kHz sont compatibles avec les modes de résonance mécanique des bras de support (voir figure 2.22).

11. Energy-dispersive X-ray spectroscopy. Il s'agit d'un spectroscope monté dans le microscope électronique qui permet de déterminer les éléments chimiques au point focal.

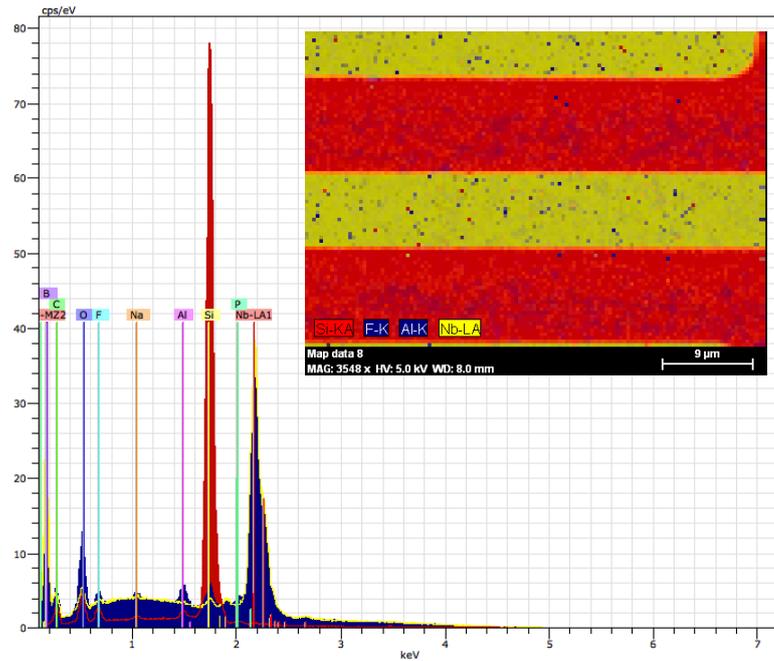


Fig 2.20 – Analyse EDS-X de la micro-poutrelle. Les bandes horizontales jaunes dans la figure de l'insert sont les doigts en niobium de la capacité inter-digitée. On distingue nettement les raies du carbone, oxygène, phosphore et fluor qui peuvent provenir des produits utilisés pendant la fabrication : gaz pour RIE/DRIE (C_4F_8 , SF_6 , O_2 , Ar), Alu-Etch (HNO_3 , H_3PO_4 , CH_3COOH), solvants (acétone, isopropanol, éthanol) et résines (AZ-1512HS, S1813). Les traces d'aluminium (utilisé comme masque) se trouvent au même endroit que les traces de fluor. Le bore est un dopant présent dans le substrat silicium.

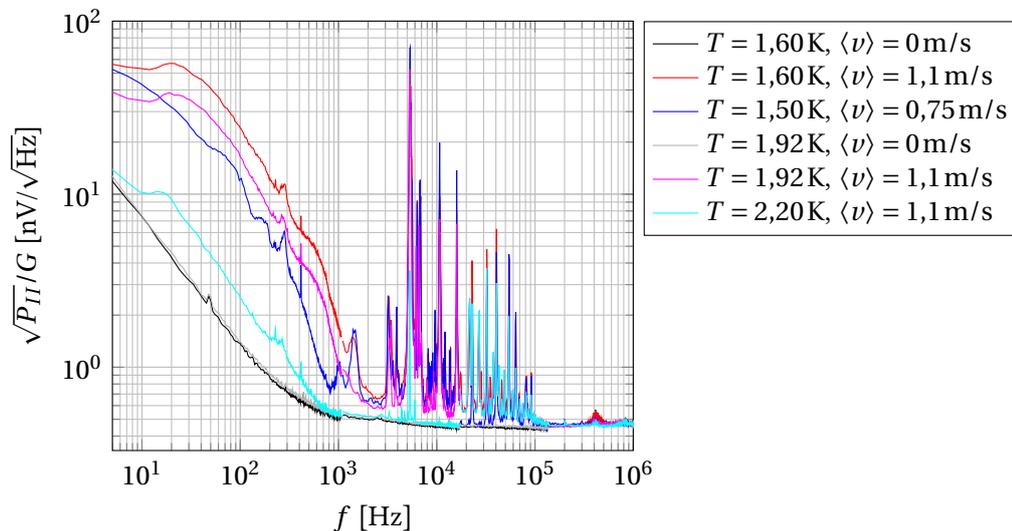


Fig 2.21 – Spectre de puissance du signal obtenu sous écoulement à diverses températures avec le capteur à micro-poutrelle avec l'électronique « directe » (figure 2.18), en phase (sortie I du mixer).

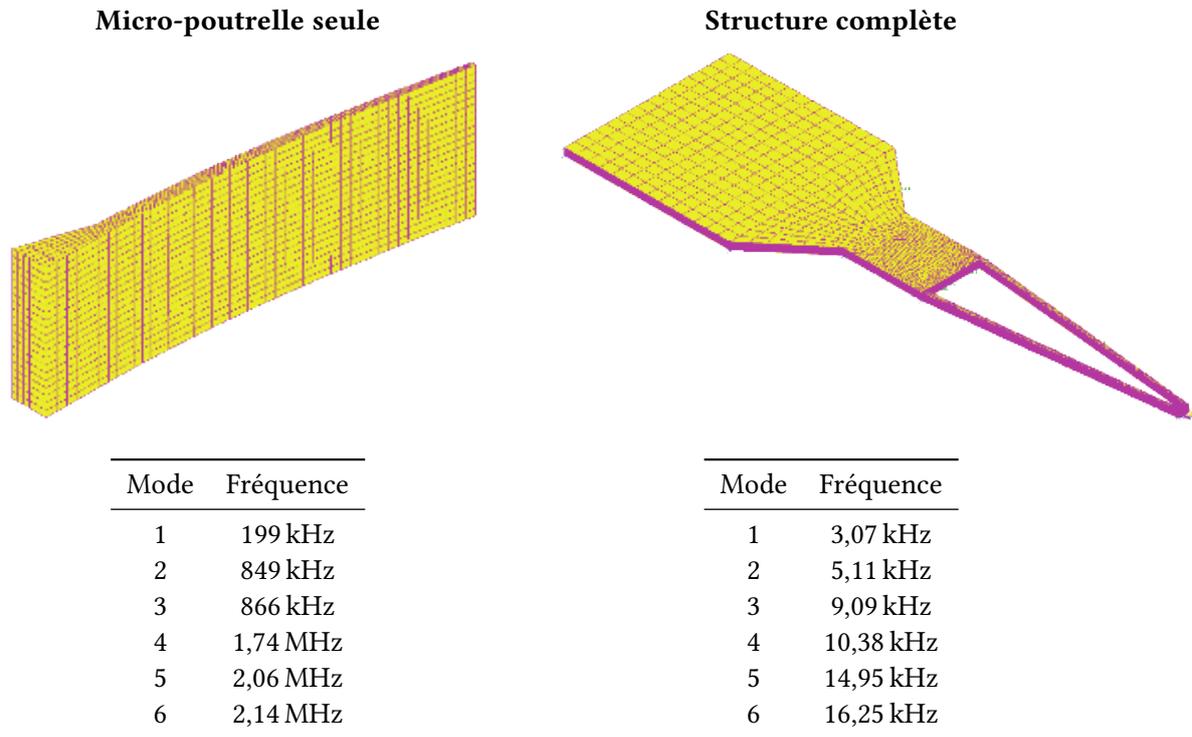


Fig 2.22 – Quelques éléments de la simulation par éléments finis de la micro-poutrelle réalisée par le SERAS.

Électronique à modulation de fréquence

Pour s'affranchir du bruit à basse fréquence, il est possible d'utiliser une technique de mesure avec une modulation de la fréquence RF (FM). Cette méthode est utilisée couramment et nous a été proposée par Christophe THIRION pour s'affranchir du bruit de phase. En pratique, la modulation de fréquence de l'onde incidente conduit à une modulation d'amplitude de S_{21} . Celle-ci peut être démodulée à l'aide d'une détection synchrone (NF LI-5640). Le schéma électronique complet est donné sur la figure 2.23. En principe, il suffit de choisir la fréquence de modulation dans un domaine où le bruit de phase est faible.

Le spectre de puissance obtenu (voir figure 2.24) montre un rapport signal sur bruit beaucoup plus favorable que précédemment (figure 2.21). Le rapport signal sur bruit est bien plus grand à 2 Hz (plus d'une décade). Le spectre obtenu est compatible avec les caractéristiques hydrodynamiques attendues :

- Plateau basse fréquence pour $f < 30\text{Hz}$;
- Pic de Strouhal associé aux lâchers de vortex par le générateur de sillage à $f = 20\text{Hz}$ (voir Eq. 3.14, page 61, voir aussi [Lie66]) ;
- Spectre décroissant avec une loi de puissance proche de $f^{-5/3}$ pour f comprise entre 30 Hz et 1 kHz.

Cependant, l'origine du bruit dans la gamme 300 Hz – 1 kHz reste mal comprise. Néanmoins, on peut constater que les performances de ce premier prototype de capteur à micro-poutrelle sont proches de celles des micro-Pitots présentés plus haut. Et ceci, malgré la sensibilité largement diminuée par le faible facteur de qualité du résonateur. On peut s'attendre à des performances bien supérieures avec un résonateur de facteur de qualité élevé. Pour cela, il convient d'ajouter des étapes supplémentaires de nettoyage des traces d'aluminium. Elles n'ont pas été mises en œuvre par manque de temps.

L'étalonnage du système est difficile à cause du bruit basse fréquence d'amplitude élevée. On peut mesurer la valeur moyenne de l'amplitude en fonction de la vitesse (figure 2.24) mais cela nécessite de moyennner pendant un temps très long (plusieurs heures pour un balayage aller-retour complet). On peut vérifier que les points obtenus pendant un aller-retour très lent (⊙) coïncident avec la valeur moyenne

2 Développement de micro-capteurs de vitesse

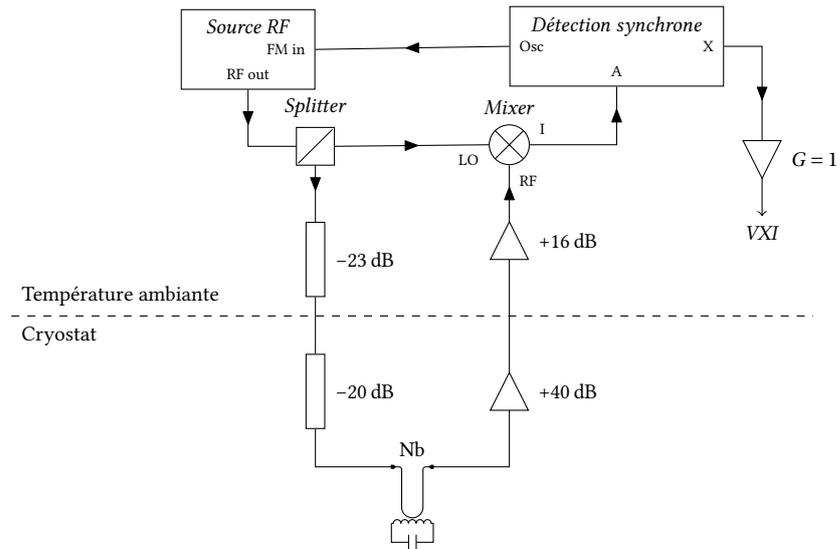


Fig 2.23 – Circuit électronique à modulation de fréquence pour la mesure de l'élongation de la micro-poutrelle.

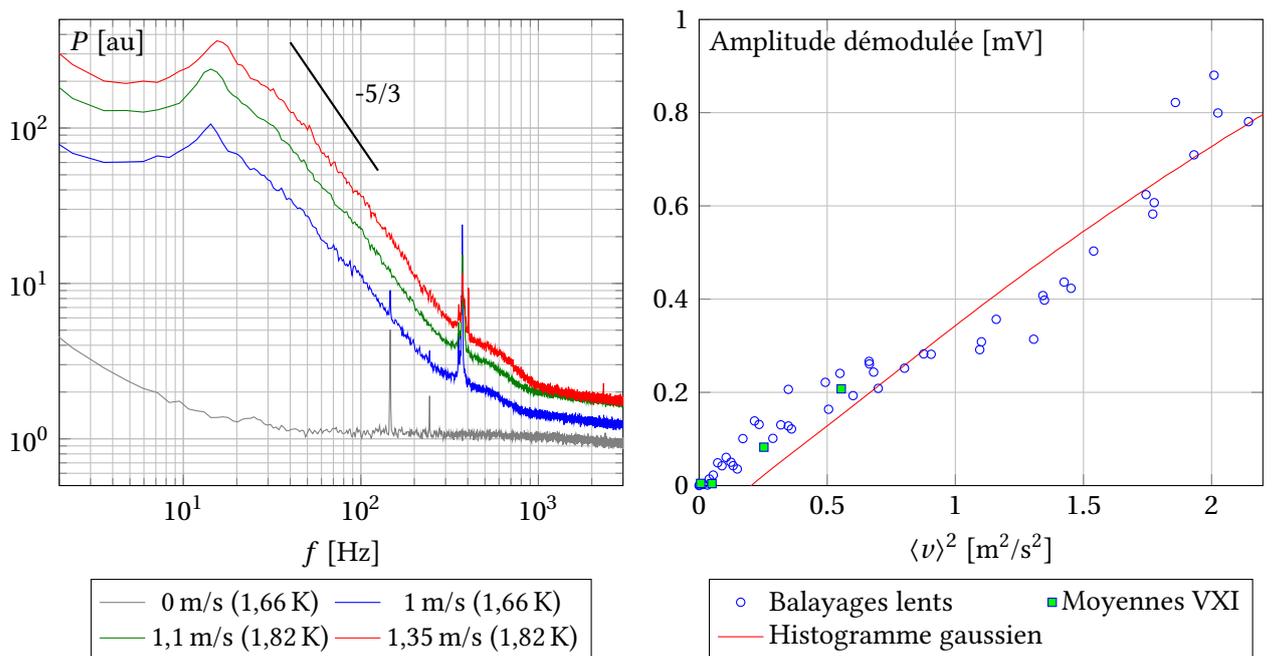


Fig 2.24 – À gauche : spectre de puissance obtenu sur le capteur à micro-poutrelle avec l'électronique à modulation de fréquence (figure 2.23) sous écoulement et diverses températures. À droite : étalonnages de la réponse du capteur obtenus par plusieurs méthodes : moyennage par la détection synchrone avec $t_c = 3$ s, valeur moyenne de l'enregistrement de fluctuations et ajustement gaussien de l'histogramme [Cha00].

mesurée à vitesse donnée pendant l'acquisition d'une série temporelle (■). On peut également vérifier que la sensibilité ne dépend pas significativement de la fréquence : il est possible de réaliser un étalonnage à partir des fluctuations en cherchant la fonction d'étalonnage qui permet de rendre l'histogramme du signal gaussien. Cette méthode a été utilisée par le passé pour étalonner des fils chauds [Cha00]. La fonction obtenue pour une série acquise avec $\langle v \rangle \approx 1 \text{ m/s}$ (—) est quadratique avec $\langle v \rangle$ avec une pente proche des points d'étalonnage obtenus à partir de l'amplitude moyenne. Les deux étalonnages, statique et dynamique, sont donc compatibles.

2.3.5 Perspectives

Le prototype obtenu permet de valider les principes envisagés : méthode de mesure de la vitesse en He II par déflexion d'une micro-poutrelle, mesure de l'élongation par un micro-résonateur supraconducteur. On s'attend à pouvoir augmenter significativement la sensibilité en améliorant le facteur de qualité du micro-résonateur. Dans ce cas, on peut envisager de diminuer la longueur de la poutrelle et donc d'améliorer la résolution (peut-être jusqu'à $50 \mu\text{m}$).

Par ailleurs, la technique de mesure et de fabrication permet d'envisager un peigne de poutrelles (avec multiplexage sur une seule ligne RF) afin de mesurer les corrélations de vitesse locales spatiales et temporelles.

Enfin, la technique de modulation de fréquence permet de s'affranchir des bruits de phase. Par conséquent, on peut envisager la deuxième technique de fabrication rejetée au départ à cause de bruit de phase introduit par les diélectriques désordonnés (oxyde, nitrure ou galette SOI). Ces techniques permettent d'atteindre des épaisseurs plus régulières, plus contrôlées et beaucoup plus fines.

CAPTEUR À MICRO-POUTRELLE

- Validation du principe de l'anémométrie par micro-poutrelle dans l'hélium II ;
- Validation du principe d'un micro-résonateur supraconducteur pour mesurer l'élongation de la poutrelle ;
- Techniques de modulation de fréquence pour s'affranchir du bruit de phase à basse fréquence ;
- Perspectives d'amélioration de la sensibilité après augmentation du facteur de qualité du résonateur et affinement de la poutrelle (galette SOI) ;
- Perspectives de mesures physiques à l'aide d'un peigne de micro-poutrelles multiplexées : corrélations de vitesse à petite échelle, peigne de poutrelles de différentes tailles dans un contre-courant ;
- Perspectives pour d'autres systèmes dans lesquels il est important de ne pas introduire de chaleur parasite (convection de Rayleigh-Bénard cryogénique) ;
- Ce type de micro-résonateur peut être adapté à la mesure locale dynamique de la température ou de la densité via la mesure de la constante diélectrique de l'hélium.

3 Spectres de vitesse

Sommaire

3.1 Introduction et motivations	51
3.2 Écoulement de grille	52
3.2.1 Expérience « TSF »	52
3.2.2 Analyse quantitative des mesures de grille	56
3.3 Sillage proche	60
3.4 Expérience « Toupie »	62
3.4.1 Conception de l'expérience	62
3.4.2 Mesures de vitesse	64
3.5 Comportement spectral à petite échelle	65
3.5.1 Modèle numérique	66
3.5.2 Spectre de vitesse	67

3.1 Introduction et motivations

Contrairement au cas des écoulements de contre-courant (voir section 1.3.3), un écoulement de « co-courant » est un écoulement dans lequel les deux composantes de l'He II (normal et superfluide) sont en mouvement dans le même sens. Cet écoulement peut être produit par action mécanique (pompe centrifuge, grille tirée...).

Dans ce cas, l'écoulement obtenu semble quasi-classique : le débit de masse est non nul et dans la même direction que la quantité de mouvement, et on observe une résistance au mouvement (perte de charge, traînée) similaire au cas d'un fluide classique [Rou94 ; SHS99 ; FBS01]. C'est ce type d'écoulement qui est utilisé pour refroidir les bobines supraconductrices des accélérateurs de particules (comme au CERN).

Néanmoins, le système est fondamentalement différent d'un fluide classique : il s'agit d'un système à deux composantes et l'une des composantes est non-visqueuse avec une vorticité quantifiée. Une question importante est de savoir comment la turbulence générée dans ce contexte se compare à la turbulence classique. Des mesures expérimentales plus anciennes ont révélé des différences quantitatives concernant le spectre de fluctuations locales de vorticité [Roc07 ; Bra08] mais aussi des similarités surprenantes concernant le taux de décroissance de la turbulence [SSD99 ; NSD05 ; CGS07 ; WG08] et le spectre de vitesse [MT98].

Au début de ma thèse, une seule mesure de fluctuations locales de vitesse avait été publiée. Il s'agit de l'expérience de Maurer & Tabeling (1998). Des théories de la turbulence quantique ont été construites après cette unique mesure qui n'a jamais été reproduite par la publication d'un autre spectre depuis plus de 10 ans. Il est également souhaitable de reproduire un résultat similaire dans une géométrie bien définie hydrodynamiquement et avec un faible taux de turbulence (pour éviter les biais liés aux capteurs). Pour cela, l'écoulement idéal est l'écoulement de grille, c'est-à-dire l'écoulement obtenu dans le sillage d'une grille (voir figure 3.1 pour une image classique).

Nos objectifs sont les suivants :

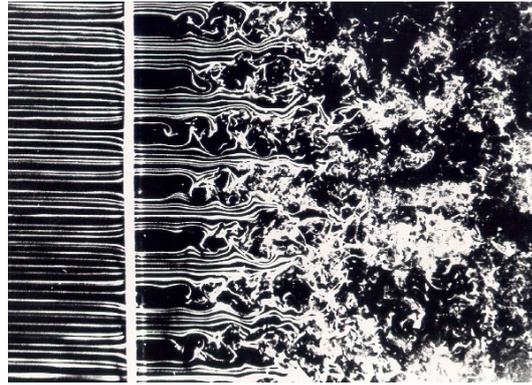


Fig 3.1 – Image d'un écoulement classique de grille, H.M. Nagib, Fluid Dynamics Research Center, IIT. Le fluide est laminaire avant la grille (à gauche). Le sillage est turbulent en aval de la grille (à droite).

- Reproduire le résultat de Maurer & Tabeling dans un écoulement de grille ;
- Étendre ce résultat à diverses géométries d'écoulement ;
- Quantifier l'intensité de la cascade d'énergie en turbulence superfluide ;
- Caractériser les mécanismes dissipatifs à petite échelle.

Pour cela, j'ai utilisé pendant ma thèse deux installations cryogéniques : l'expérience « TSF » qui permet d'obtenir un écoulement de grille avec des débits massiques très importants à des températures comprises entre 1,65 K et 2,6 K, avec une échelle intégrale de l'ordre de 1 mm et l'expérience « Toupie » qui permet d'obtenir un écoulement de sillage lointain à des températures comprises entre 1,5 K et 4,2 K, avec une échelle intégrale de l'ordre de 1 cm.

J'ai également travaillé sur des champs de vitesse issus de simulations numériques du modèle continu à deux fluides. Le nombre de Reynolds est beaucoup plus petit mais toutes les échelles sont résolues depuis l'échelle intégrale jusqu'à l'échelle quantique inter-vortex, ce qui permet d'étudier les mécanismes à petite échelle.

3.2 Écoulement de grille

3.2.1 Expérience « TSF »

J'ai réalisé une série de mesures à l'aide des capteurs à stagnation de pression dans la soufflerie « TSF ». Cette soufflerie a été conçue et mise en œuvre dans le cadre d'une collaboration réunissant l'ENS Lyon, l'Institut Néel, le SBT (INAC/CEA Grenoble), le SPEC (IRAMIS/CEA Saclay) et le LEGI, soutenue par l'ANR. Ce projet de soufflerie a démarré en 2005 ; la phase de construction s'est achevée peu avant le début de ma thèse.

Il s'agit d'une installation cryogénique de grande ampleur : l'écoulement est généré par une pompe froide Barber & Nichols dans une conduite fermée. La température dans le circulateur est maintenue constante à l'aide d'un échangeur plongé dans un bain saturé [Rou08]. La pression dans le circulateur peut être modifiée en ouvrant une vanne vers un circuit d'hélium à température ambiante (voir diagramme sur la figure 3.2). L'expérience tire parti d'un réfrigérateur dédié produisant 400 W de puissance froide à 1,8 K.

La zone de mesure située après l'échangeur, après un convergent, est équipée de plusieurs inserts permettant de placer les capteurs en travers de l'écoulement (figure 3.3). Un cache de protection cylindrique permet de protéger le fil chaud pendant les phases transitoires. Il peut être déplacé à froid à l'aide d'un

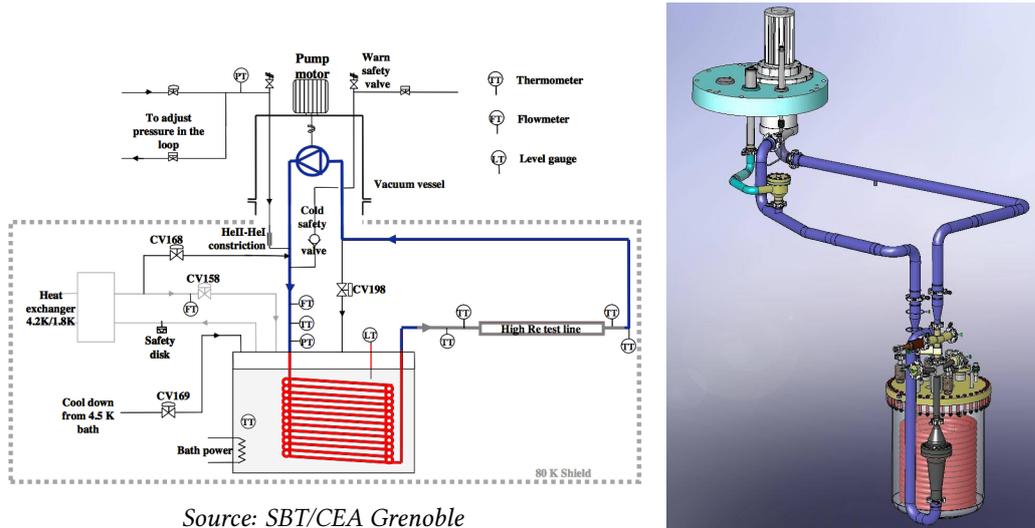


Fig 3.2 – À gauche : diagramme hydraulique du circulateur « TSF ». À droite : modèle 3D du circulateur (en bleu foncé). La zone de mesure apparaît en gris foncé.

système magnétique.

L'écoulement est obtenu en aval d'une grille de maille $M = 3,9\text{ mm}$ et d'épaisseur $0,8\text{ mm}$ (voir figure 3.4). La conduite est schématisée sur la figure 3.5. Les dimensions principales sont données dans la table 3.1. L'installation permet d'atteindre des vitesses moyennes dans la conduite de $0,4$ à 5 m/s . La température peut être choisie entre $1,65$ et $2,6\text{ K}$. La pression est maintenue bien au dessus de la pression de vapeur saturante de façon à ce qu'il n'y ait pas de cavitation. Le nombre de Reynolds basé sur la maille de la grille M , $Re_M = M \langle v \rangle / \nu$ vaut entre 1×10^5 et 2×10^6 en He I. En He II, on peut définir plusieurs nombres de Reynolds, par exemple en utilisant le quantum de vorticit e $\kappa = h/m \approx 9,9 \times 10^{-8}\text{ m}^2/\text{s}$. On trouve alors Re_κ entre $1,5 \times 10^4$ et 2×10^5 .

Le choix de l'écoulement de grille est motivée par deux raisons :

- il s'agit d'un écoulement canonique très documentée en turbulence classique [CBC66] ;
- il s'agit de l'écoulement de laboratoire le plus proche d'une turbulence homog ene et isotrope ;
- le taux de turbulence τ est faible (de l'ordre du %)   quelques dizaines de mailles en aval de la grille, ce qui permet d'utiliser les capteurs à pression de stagnation sans introduire de biais : termes du second ordre négligeables, angle d'attaque sur le capteur faible.

ϕ_p	27.2 mm	L_1	61 mm	l_2	3 mm	l_3	9 mm
ϕ_c	15.3 mm	r_1	8 mm	r_2	7 mm	r_3	11 mm
L	565 mm	ϕ_{i1}	0.4 mm	ϕ_{i2}	0.6 mm	ϕ_{i3}	0.4 mm
L_c	479 mm	ϕ_{o1}	0.6 mm	ϕ_{o2}	0.9 mm	ϕ_{o3}	0.6 mm
M	3.9 mm/mesh	n_M	7 mesh/diam	ϕ_{ref}	0.5 mm	d_{ref}	15 mm
Ψ	3.5 mm	α	15°				

TABLE 3.1 – Dimensions principales de la soufflerie « TSF » (voir les figures 3.5 et 2.2 pour la définition des notations)

Plusieurs autres capteurs étaient prévus dans le projet « TSF » initial : un fil chaud supraconducteur, une pince à second son et des capteurs de diffraction acoustique. Le fil chaud et les capteurs acoustiques n'ont malheureusement pas fonctionn e dans ce contexte. La pince à second son a mis en évidence une loi

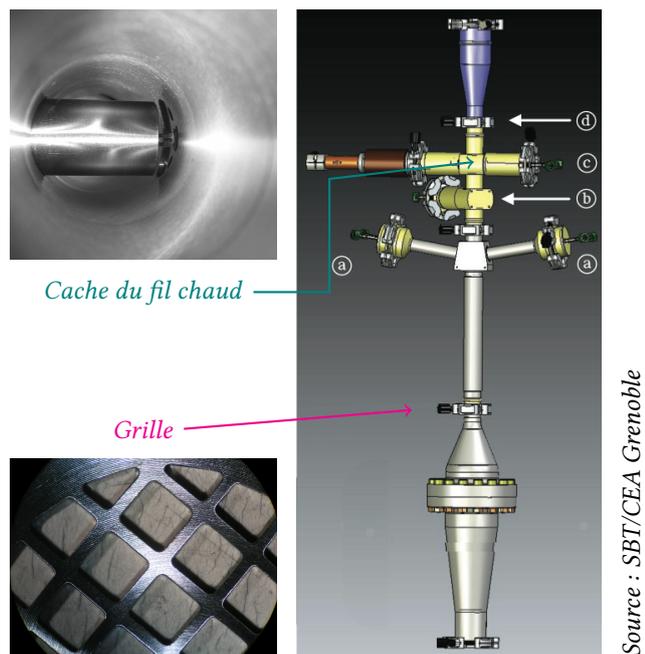


Fig 3.3 – Détails de la zone de mesure du circulateur TSF. (a) : capteurs acoustiques. (b) : pince à second son. (c) : fil chaud. (d) : tube de Pitot miniature.

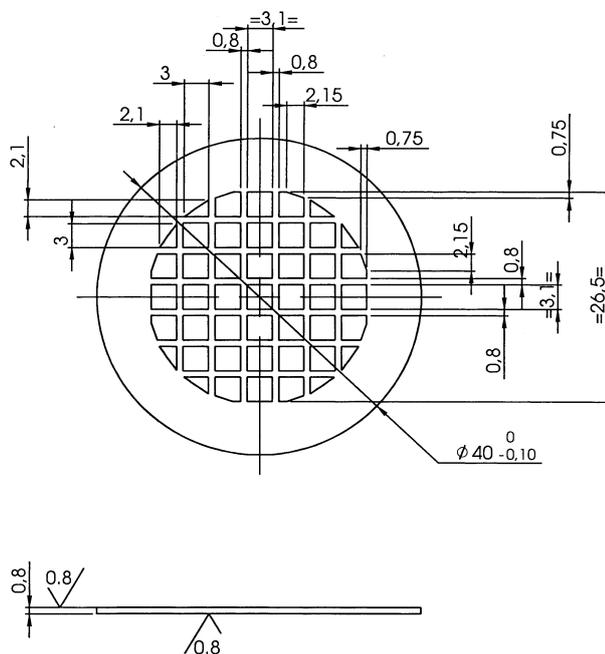


Fig 3.4 – Schéma de la grille utilisée pour générer l'écoulement dans l'expérience TSF.

d'échelle $1/\sqrt{L_\perp} \sim Re^{-3/4}$ mais avec un préfacteur anormalement grand par rapport aux valeurs de la littérature (quelques valeurs de la littérature sont indiquées sur la figure 5.4, page 82, au chapitre 5), ceci peut-être dû à un défaut d'alignement. Le choix d'adapter un capteur à pression de stagnation a été fait après le démarrage du projet « TSF » et suite à des expériences préliminaires dans la mini-soufflerie du CRTBT. Ceci explique pourquoi l'échelle intégrale est si petite, à peine plus grande que la résolution du capteur. L'écoulement n'a pas été dimensionné pour ce capteur. Par ailleurs, les tubes de Pitot miniatures sont situés en aval du cache de protection rétractable du fil chaud. Celui-ci peut donc être utilisé comme générateur de sillage. Finalement, j'ai pu obtenir des données dans trois configurations :

1. écoulement de grille avec capteur en x_1 (turbulence homogène isotrope en équilibre avec faible taux de turbulence) ;
2. sillage proche (turbulence non homogène non isotrope et avec un fort taux de turbulence) ;
3. écoulement de grille avec capteur en x_2 .

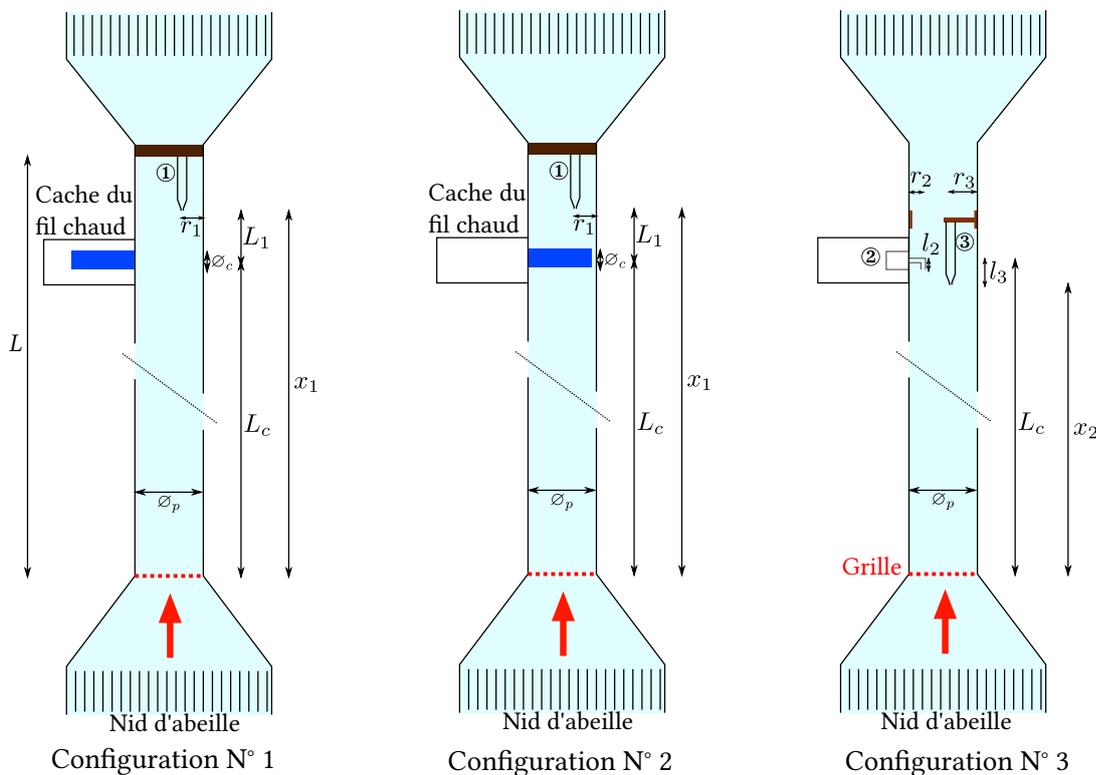


Fig 3.5 – Schéma des diverses configurations de l'expérience « TSF ». Dans la configuration 2, le cache du fil chaud est placé en travers de l'écoulement et génère un sillage sur le capteur à une distance L_c en aval de la grille. Le Pitot ① a été volontairement désaxé pour éviter le sillage du fil chaud lui-même. Dans la configuration 3, deux Pitots (② et ③) sont disponibles pendant le refroidissement.

3.2.2 Analyse quantitative des mesures de grille

Les capteurs utilisés sont les tubes de Pitot miniatures ①, ② et ③ discutés au chapitre 2. Leurs positions en aval de la grille sont $x/M = 138 \pm 2$ dans la configuration N°1 et $x/M = 121 \pm 2$ dans la configuration N°3. Par conséquent, on peut estimer le taux de turbulence τ et l'échelle intégrale transverse L_g attendus

en He I à partir des lois empiriques obtenues par Comte-Bellot & Corrsin [CBC66],

$$\frac{\langle v \rangle^2}{\langle v'^2 \rangle} = 15 \left(\frac{x}{M} - \frac{x_0}{M} \right)^{1.2} \quad (3.1)$$

$$\frac{L_g}{M} = 0.06 \left(\frac{x}{M} - \frac{x_0}{M} \right)^{0.35} \quad (3.2)$$

où x_0/M est une origine virtuelle ; sa valeur est comprise entre 2 et 4.

Le taux de turbulence τ attendu dans la conduite « TSF » est alors compris entre 1,3% et 1,5% et l'échelle intégrale transverse L_g entre 1,2 mm et 1,3 mm. D'autres valeurs des préfacteurs des équations 3.1 et 3.2 sont proposées dans la littérature. Si on utilise plutôt celles proposées par Mohamed & Larue [ML90], on trouve un taux de turbulence entre 0,84% et 1,6% dans la configuration N°1 et entre 0,92% et 1,7% dans la configuration N°3. Dans tous les cas, le taux de turbulence est suffisamment petit pour que les termes correctifs de l'équation 2.11 représentent moins de 3% du signal mesuré (voir table 2.1 page 25).

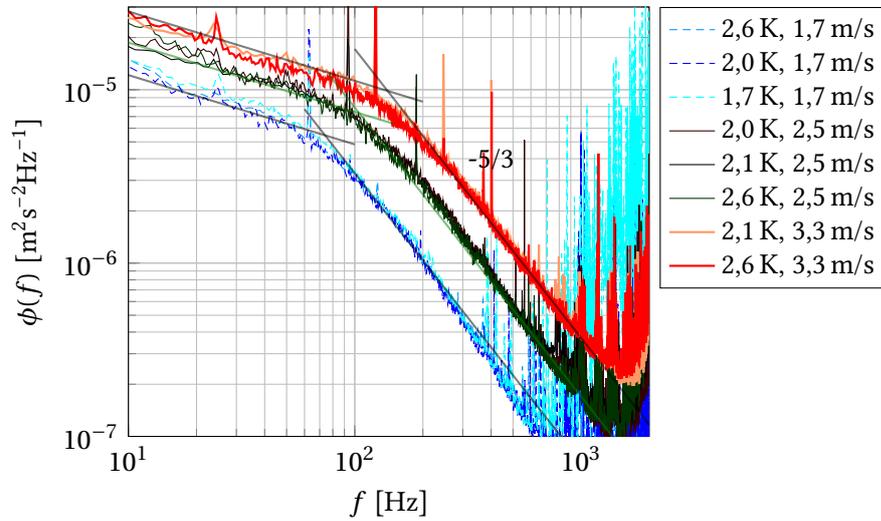


Fig 3.6 – Densité spectrale de puissance du signal de vitesse obtenu avec le Pitot ① en écoulement de grille, pour trois vitesses moyennes différentes, au dessus et en dessous la transition superfluide. La fréquence de résonance de Helmholtz du capteur se trouve autour de 2 kHz. Les droites noires sont des aides visuelles qui permettent de trouver la fréquence du coude. Les droites dans la partie haute fréquence permettent de comparer à la loi d'échelle $f^{-5/3}$.

On définit le spectre de vitesse $\phi(f)$ sur l'intervalle de temps $[0, t_{\max}]$ comme,

$$\phi(f) = \left| \sqrt{\frac{2}{t_{\max}}} \int_0^{t_{\max}} v'(t) e^{-2i\pi f t} dt \right|^2 \quad (3.3)$$

La normalisation est choisie telle que

$$\int_0^{+\infty} \phi(f) df = \langle v'^2 \rangle \quad (3.4)$$

En pratique, les spectres sont calculés par méthode Welch sur des fenêtres de 2^{15} points. Les enregistrements durent 7 min pour la plupart des acquisitions mais il y a aussi quelques enregistrements plus

longs (15 min et 30 min). La fréquence d'échantillonnage est 9,77 kHz ou 19,5 kHz. On utilise des cartes d'acquisitions VXI Agilent E1437A équipées d'un filtre anti-repliement. Quelques spectres de vitesse $\phi(f)$ sont tracés sur la figure 3.6.

En He I, on s'attend à une loi d'échelle de type Kolmogorov $\phi(f) \sim f^{-5/3}$ dans la zone inertielle. Au dessus de la fréquence du coude (vers 100 à 200 Hz), les points expérimentaux sont compatibles avec cette loi d'échelle. Sur cette représentation, les mesures en He II semblent indifférenciables de celles en He I. Cela suggère que les statistiques de vitesse d'ordre 2 dans les grandes échelles inertielles sont identiques au dessus et en dessous de la transition superfluide.

Pour comparer de façon quantitative avec les résultats de la littérature sur les fluides classiques, on peut extraire des quantités à partir du spectre. Tout d'abord, on peut calculer précisément l'échelle intégrale et le taux de turbulence. Ces deux quantités peuvent être calculées à partir des spectres, et les valeurs obtenues en He I peuvent être comparées aux résultats de Comte-Bellot & Corrsin. Pour relier l'échelle intégrale longitudinale au spectre $\phi(f)$, on part de la définition de L_l comme l'intégrale de la corrélation de la vitesse :

$$L_l = \frac{1}{\langle v'^2 \rangle} \int_0^{+\infty} \langle v'(0)v'(r) \rangle dr = \frac{\pi}{2} \frac{\phi(0)}{\int_0^{+\infty} \phi(k) dk} \quad (3.5)$$

où le nombre d'onde k et le spectre d'énergie dans l'espace des nombres d'onde $\phi(k)$ sont définis comme

$$\begin{cases} k = 2\pi f / \langle v \rangle \\ \phi(k) = \frac{\langle v \rangle}{2\pi} \phi(f) \end{cases} \quad (3.6)$$

Dans le cas d'un spectre modèle, blanc pour $k < k_0$, et en $k^{-5/3}$ pour $k > k_0$, on peut montrer que

$$\int_0^{+\infty} \phi(k) dk = \frac{5}{2} \phi(0) k_0 \quad (3.7)$$

On en déduit une expression de l'échelle intégrale longitudinale en fonction de la fréquence du coude du spectre comme $L_l = \langle v \rangle / (10f_0)$ et en supposant que la turbulence est homogène et isotrope, l'échelle intégrale transverse peut être estimée comme $L_g = L_l/2$.

Expérimentalement, dans la gamme de fréquence $f < f_0$, le spectre n'est pas tout à fait blanc, jusqu'à quelques dizaines de millihertz. Cela correspond à des petites fluctuations — seulement 0,1 % de la vitesse moyenne — et donc cela ne change pas beaucoup la valeur expérimentale du taux de turbulence. Il s'agit probablement de fluctuations dans le forçage de la vitesse moyenne plutôt que d'un signal produit par la grille. Il est néanmoins nécessaire de choisir un critère pour déterminer la fréquence du coude f_0 . On la définit comme l'intersection de deux lois de puissances asymptotiques : une en $f^{-5/3}$ ajustée sur le spectre (dans les échelles inertielles) et une autre avec un loi de puissance *ad-hoc* $f^{-0.4}$ qui reproduit la partie du spectre résolue à basse fréquence. Les valeurs obtenues pour la fréquence du coude sont résumées sur la table 3.2.

Pour calculer l'écart-type de la fluctuation de vitesse, puis le taux de turbulence, $\tau = \sqrt{\langle v'^2 \rangle} / \langle v \rangle$, on estime l'aire sous la courbe $\phi(f)$, ou en pratique l'aire sous la courbe $f \cdot \phi(f)$ en semilog, afin de s'affranchir plus facilement des pics de bruits (voir figure 3.7). Cela permet également de ne pas prendre en compte la contribution basse fréquence puisqu'on ne s'attend pas à ce qu'elle provienne de la turbulence.

Dans la configuration N°1 ($x_1 = 540$ mm), on trouve un taux de turbulence $\tau_1 = (1,3 \pm 0,1)$ % et dans la configuration N°3 ($x_2 = 470$ mm), $\tau_2 = (1,75 \pm 0,15)$ % (voir figure 3.8). Dans les deux configurations, l'échelle intégrale est de l'ordre de $L_l = 2,5$ mm, les barres d'erreur ne permettent pas de résoudre l'évolution de l'échelle intégrale entre les deux positions. Un premier résultat est que l'on trouve que ces deux quantités sont compatibles avec les lois empiriques de Comte-Bellot et Corrsin. Par ailleurs, et plus remarquablement, les valeurs obtenues à la fois pour l'échelle intégrale et pour le taux de turbulence

Configuration	x [mm]	$\langle v \rangle$ [m/s]	f_0 [Hz]	L_l [mm]	L_g [mm]
<i>He I & He II identiques aux incertitudes près</i>					
1	540	3.3	140 ± 25	2.4 ± 0.4	1.2 ± 0.2
1	540	2.5	105 ± 25	2.4 ± 0.8	1.2 ± 0.4
1	540	1.7	74 ± 25	2.3 ± 0.9	1.15 ± 0.45
<i>He I seulement</i>					
2	470	4.2	154 ± 50	2.7 ± 1.0	1.3 ± 0.5
2	470	2.5	98 ± 40	2.5 ± 1.2	1.25 ± 0.6

TABLE 3.2 – Quelques mesures d'échelle intégrale obtenues à partir des spectres de vitesses mesurés dans la configuration N°1 avec le Pitot ① et dans la configuration N°3 avec le Pitot ②. À titre de comparaison, la prédiction de Comte-Bellot et Corrsin conduit à $L_l = 2,6\text{mm}$ pour la configuration N°1 et $L_l = 2,5\text{mm}$ pour la configuration N°3

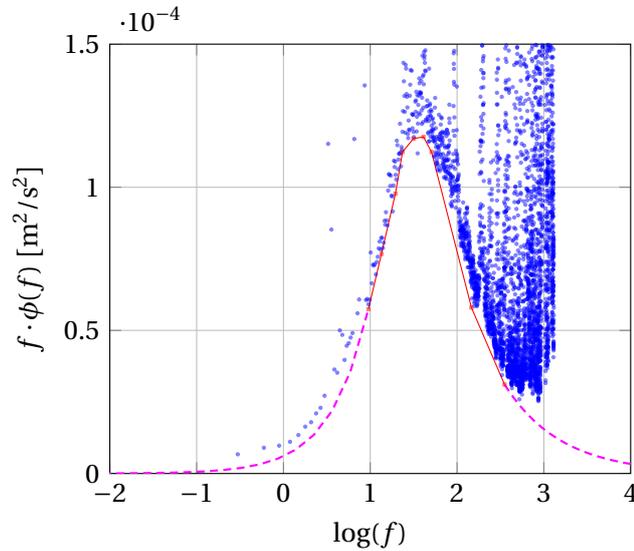


Fig 3.7 – Estimation du « squelette » du spectre d'énergie. L'aire sous ce squelette correspond à l'énergie des fluctuations de vitesse. Les points bleus sont des mesures expérimentales. La courbe rouge est le squelette estimée.

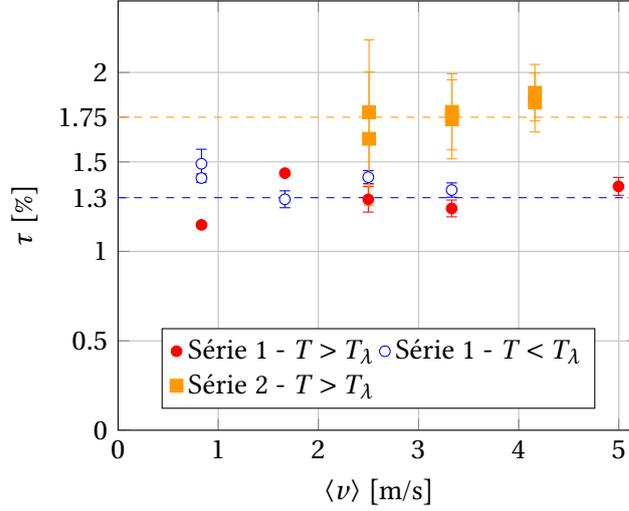


Fig 3.8 – Taux de turbulence τ obtenus dans les deux configurations de turbulence de grille dans l'expérience « TSF » pour plusieurs valeurs de vitesse moyenne et de température.

sont identiques au dessus et en dessous de la transition superfluide, aux erreurs expérimentales relatives près, de l'ordre de 8 % pour τ et 20 % pour L_l .

À partir de la différence entre τ_1 et τ_2 , on peut estimer directement le taux de dissipation turbulent ϵ entre la position x_1 et x_2 .

$$\epsilon \approx \langle v \rangle^3 \left| \frac{\partial \tau^2}{\partial x} \right| \approx \langle v \rangle^3 \frac{(\tau_2^2 - \tau_1^2)}{(x_2 - x_1)} \quad (3.8)$$

On estime $\partial \tau^2 / \partial x \approx 0,0021 \text{ m}^{-1}$ à partir des valeurs τ_1 et τ_2 de la figure 3.8. Ce résultat est en accord quantitatif avec l'estimation empirique usuelle,

$$\epsilon \approx 1.1 \frac{\langle v'^2 \rangle^{3/2}}{L_g} = 1.1 \langle v \rangle^3 \frac{\tau^3}{L_g} \quad (3.9)$$

qui conduit à des valeurs de ϵ comprises entre $0,0012$ et $0,0045 \text{ m}^{-1}$ (la fourchette est due à la barre d'erreur sur τ).

En supposant que la turbulence est homogène et isotrope, l'estimation de ϵ permet de calculer la valeur de la micro-échelle de Taylor λ en He I,

$$\epsilon = 15v \frac{\langle v'^2 \rangle}{\lambda^2} \quad (3.10)$$

Cela conduit à des valeurs de λ comprises entre 70 et $230 \mu\text{m}$ et donc à un nombre de Reynolds basé sur la micro-échelle $R_\lambda = \lambda \sqrt{\langle v'^2 \rangle} / \nu$ compris entre 60 et 250 . En particulier, on trouve $R_\lambda \geq 100$ pour la plupart des conditions expérimentales, ce qui permet de supposer (en He I) que la turbulence de grille obtenue est bien développée. Par conséquent, on s'attend à ce que le spectre d'énergie dans la gamme d'échelle inertielle suive la prédiction de Kolmogorov

$$\phi(k) = C_k \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (3.11)$$

Pour le vérifier, on a tracé sur la figure 3.9 le spectre d'énergie compensé $\psi(k)$,

$$\psi(k) = \epsilon^{-2/3} k^{5/3} \phi(k) \quad (3.12)$$

La valeur du plateau permet d'obtenir une estimation de la constante de Kolmogorov C_k à la fois en He I et en He II. On trouve des valeurs comprises dans la gamme 0,3 – 0,4. Il s'agit d'une constante de Kolmogorov unidimensionnelle. En supposant que le système est localement isotrope, elle est reliée à la constante tridimensionnelle C_{3d} par la relation

$$C_{3d} = \frac{55}{18} C_k \quad (3.13)$$

Cela permet d'obtenir une valeur pour la constante de Kolmogorov tridimensionnelle dans la gamme 0,9 – 1,2.

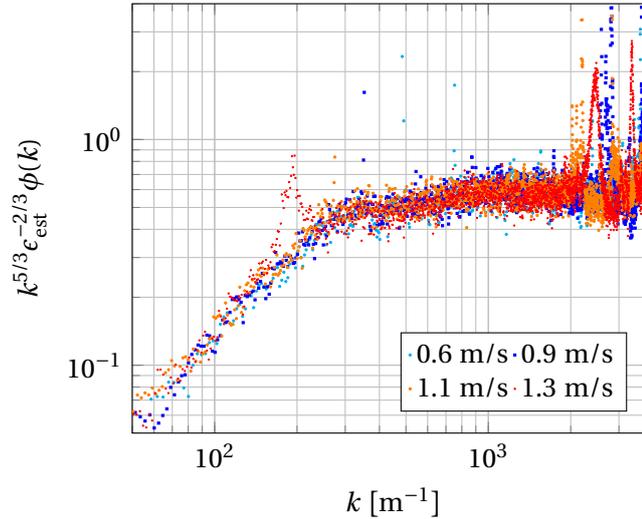


Fig 3.9 – Spectre de vitesse compensé pour diverses conditions expérimentales à la fois en He I et en He II. La valeur du plateau donne une estimation de la constante de Kolmogorov C_k au dessus et en dessous de la transition superfluide

Les expériences classiques précédentes [CBC71 ; GC74 ; GS63 ; SSG74] ont conduit à des valeurs de la constante de Kolmogorov dispersées [Sre95] autour de $C_{3d} = 1.5$ dans une fenêtre 1,0 – 1,74 (c'est-à-dire C_k dans une fenêtre 0,33 – 0,57). La valeur que l'on trouve est proche des valeurs de la fourchette basse. Cependant, on ne s'attache pas ici à la valeur exacte que l'on mesure. En effet, celle-ci peut être polluée par des erreurs systématiques comme un biais dans l'étalonnage des capteurs. Cependant, ce qui est remarquable, c'est que la mesure de la constante de Kolmogorov en He II (au moins jusqu'à 1,8 K) coïncide avec la valeur mesurée en He I aux erreurs expérimentales relatives près de l'ordre de 30 %.

3.3 Sillage proche

Les mesures quantitatives précédentes ont permis d'affiner la comparaison entre les spectres de vitesse au dessus et en dessous de la transition superfluide. Cependant, en raison du taux de turbulence faible, le rapport signal sur bruit n'est pas très élevé et la dynamique est limitée par les pics de bruit dès 500 Hz.

Pour y remédier, on se place dans la configuration N°2 en aval du cache de protection du fil chaud dans l'expérience « TSF » (voir figure 3.5). L'avantage de cette configuration est que le rapport signal sur bruit est bien plus élevé car le taux de turbulence est plus grand. L'inconvénient est que la turbulence obtenue est beaucoup moins homogène ou isotrope.

Comme le cylindre n'a pas été prévu initialement pour générer un sillage mais pour protéger le fil chaud, ses dimensions ne sont pas optimisées pour générer un sillage pleinement développé au point de mesure. Comme indiqué dans la table 3.1, le cylindre utilisé a un diamètre \varnothing_c de 15,3 mm, à comparer au diamètre de la conduite $\varnothing_p = 27,2$ mm, ce qui conduit à un confinement important. Par ailleurs, comme on peut le voir sur la figure 3.5, la longueur du cylindre est légèrement plus petite que le diamètre de la conduite. La distance adimensionnée qui sépare l'axe du cylindre du capteur L_1/\varnothing_c vaut $4,0 \pm 0,3$. Le nombre de Reynolds basé sur la dimension du cylindre, $\varnothing_c \langle v \rangle / \nu$, est dans la gamme $3 \times 10^5 - 2 \times 10^6$, où $\langle v \rangle$ est estimé en aval (ou en amont) du cylindre, et pas au niveau de la constriction où la vitesse moyenne est plus importante.

Dans le cas classique et dans une géométrie non confinée, on peut caractériser la fréquence des lâchers de tourbillons par le nombre de Strouhal, St , défini comme,

$$St = \frac{f_v \varnothing_c}{\langle v \rangle} \quad (3.14)$$

Mais dans cette gamme de nombres de Reynolds, pour les fluides classiques, le nombre de Strouhal n'est pas défini [Lie66]. Par conséquent, on ne s'attend pas nécessairement à obtenir un pic de Strouhal sur le spectre de vitesse.

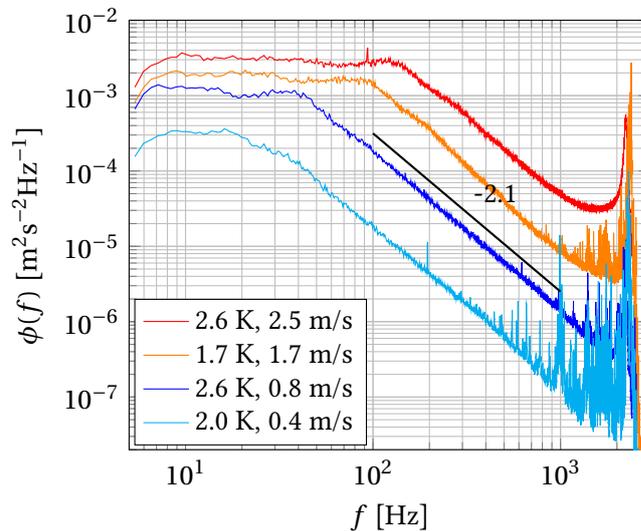


Fig 3.10 – Spectres de vitesse dans le sillage proche d'un cylindre obtenus dans l'expérience « TSF », au dessus et en dessous de la température de transition superfluide et pour différentes vitesses moyennes. Le pic visible vers 2 kHz correspond à la fréquence de Helmholtz du capteur.

Les spectres obtenus sont tracés sur la figure 3.10. Il n'y a pas de pic de Strouhal. La pente est plus forte que $-5/3$. Une raison possible, proposée par Yves Gagne, est que l'énergie immédiatement après le cylindre est concentrée à grande échelle ; elle n'a pas eu le temps de casquer complètement au sens de Kolmogorov lorsqu'elle atteint le capteur. Comme explication alternative, on peut signaler que le spectre de vitesse dans un écoulement classique fortement inhomogène, notamment au voisinage d'un tourbillon stable, est connu pour se comporter comme une loi d'échelle $f^{-\alpha}$ avec α dans une gamme $1,65 - 2,50$ [SCP00].

Quelle que soit la raison, ce que montre ce résultat c'est que l'indiscernabilité des statistiques de vitesse d'ordre 2 entre l'He I et l'He II ne nécessite pas un état en équilibre au sens de Kolmogorov.

CONCLUSIONS DES EXPÉRIENCES « TSF »

- Spectre de vitesse quantitativement compatible avec Kolmogorov 1941 en turbulence de grille ;
- Constante de Kolmogorov en He II identique à la valeur classique en turbulence de grille ;
- Spectre de vitesse indistinguable en He I et He II en sillage proche, même lorsque la turbulence n'est pas en établie au sens de Kolmogorov.

3.4 Expérience « Toupie »

L'expérience « TSF » a permis d'obtenir un écoulement qui est le plus proche possible d'une turbulence homogène et isotrope. Dans ces conditions, nous avons pu confirmer la dépendance en $k^{-5/3}$ pour le spectre de puissance de la vitesse, identique au dessus et en dessous de la transition superfluide.

La limitation de cette expérience provient du taux de turbulence faible et de l'échelle intégrale petite, ce qui ne permet de mesurer qu'une seule décade de signal avec les capteurs disponibles. Pour aller plus loin, on peut penser à deux approches :

- Diminuer la taille des capteurs et augmenter leur sensibilité ;
- Augmenter la taille de l'expérience.

Par ailleurs, les simulations numériques de la section 3.5 conduisent à penser que pour mettre en évidence expérimentalement des effets quantiques à petite échelle, il est nécessaire de pouvoir atteindre des températures inférieures à 1,4 K.

Le travail sur l'amélioration des capteurs a été présenté au chapitre 2. Cette partie 3.4 concerne la réalisation d'une nouvelle expérience, baptisée « Toupie » pour **TO**urne **P**ar l'**I**ntérieur et l'**E**xérieur : elle doit permettre également, à moyen terme, au delà de cette thèse, l'étude de la turbulence superfluide dans un référentiel tournant.

3.4.1 Conception de l'expérience

Nous avons conçu et mis en place une nouvelle soufflerie flexible (temps de refroidissement d'une journée) compatible avec une conduite de grand diamètre (jusqu'à 9 cm) afin d'obtenir de grandes échelles dans l'écoulement, et capable de descendre aux très basses températures (à terme de l'ordre de 1,2 K, correspondant à $\rho_s/\rho_n = 33.5$, ou $\rho_s/\rho = 97,1\%$). En outre, le but est de pouvoir, dans le futur, faire tourner l'ensemble de la conduite afin d'étudier la turbulence superfluide dans un référentiel tournant. Le travail de conception mécanique, d'usinage et d'assemblage a été réalisé par le service « Cryogénie » du laboratoire, et plus particulièrement par Grégory Garde. Nous avons pu faire les premières campagnes à froid pendant ma troisième année de thèse ¹.

La conduite est pressurisée par une colonne d'hélium liquide afin d'éviter la cavitation à toutes les températures de travail. La conduite utilisée dans la thèse, de diamètre 43 mm est longue de 90 cm (voir figure 3.11).

Le fluide est mis en mouvement par une pompe centrifuge fonctionnant sur le même principe que celle utilisée dans la petite soufflerie historique de l'équipe (décrite dans [Roc07]) mais optimisée spécifiquement pour la soufflerie Toupie. La conception de cette pompe a fait l'objet d'un sujet d'*atelier de l'ingénierie* à l'école ENSE3 (Phelma/Grenoble-INP). Les étudiants (P.-L. Delafin, J. Depont et E. Ghiringhelli), assistés

1. Les trois premiers refroidissements nous ont permis de calibrer les aspects purement cryogéniques : étalonnage des jauges de niveau d'hélium, autonomie, test des roulements à froid. Le quatrième refroidissement a été entravé par un problème de fuite sur le vide d'isolement. Les résultats physiques présentés dans la suite ont été obtenus au cinquième et dernier refroidissement.

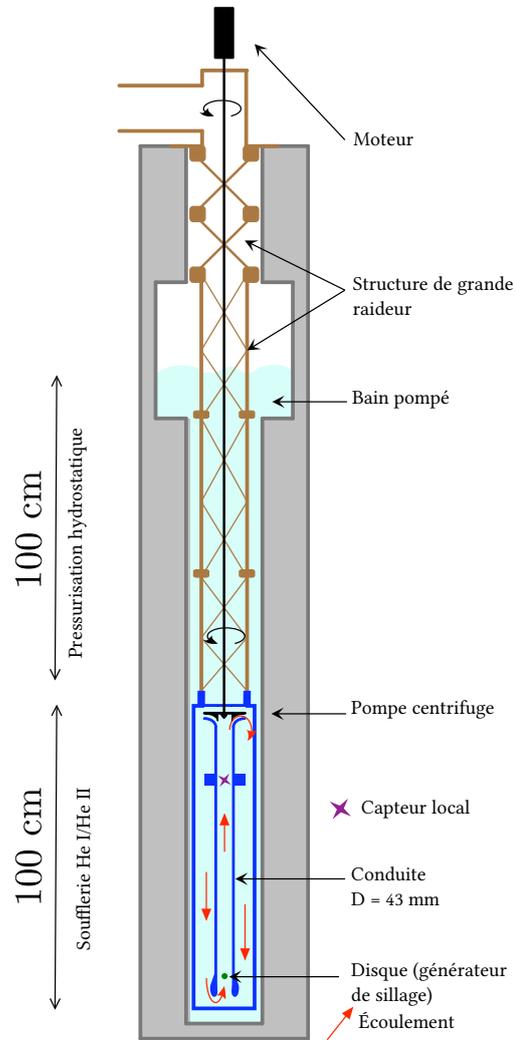


Fig 3.11 – Schéma de l'expérience « Toupie »

par leurs professeurs (J.-L. Kueny et S. Guillet) ont réalisé des optimisations numériques de l'écoulement (logiciel Gambit/Fluent) et les spécifications finales des pales (logiciel Catia). La mise au point de l'usinage de la pompe, ainsi que son assemblage dans la conduite, ont été réalisés par Grégory Garde (tour numérique, découpe à fil, fraiseuse numérique, ...). La pompe réelle (figure 3.12) permet d'atteindre un débit massique de l'ordre de 130 g/s.



Fig 3.12 – Pompe centrifuge optimisée pour l'expérience Toupie, en cours d'assemblage (ici posée à l'envers).

3.4.2 Mesures de vitesse

Les mesures locales ont été réalisées dans le sillage d'un disque plein coaxial avec la conduite de diamètre $\phi_d = 22$ mm, environ la moitié du diamètre de la conduite. Le capteur ① est situé sur une bague d'instrumentation adaptée, en aval du disque à une distance $x/\phi_d \approx 21$. Le taux de turbulence mesuré au dessus et en dessous de T_λ est de 4,8 % avec une vitesse moyenne jusqu'à $\langle v \rangle = 1$ m/s. On définit l'échelle de forçage L_0 à partir de la fréquence des lâchers de tourbillons $f_0 = \langle v \rangle / L_0$. Cette fréquence est visible sur le spectre de vitesse (figure 3.13). Le nombre de Strouhal associé (Eq. 3.14) est de l'ordre de 0.35 au dessus et en dessous de la transition superfluide, avec $f_0 = 16,5$ Hz et $L_0 = 6$ cm.

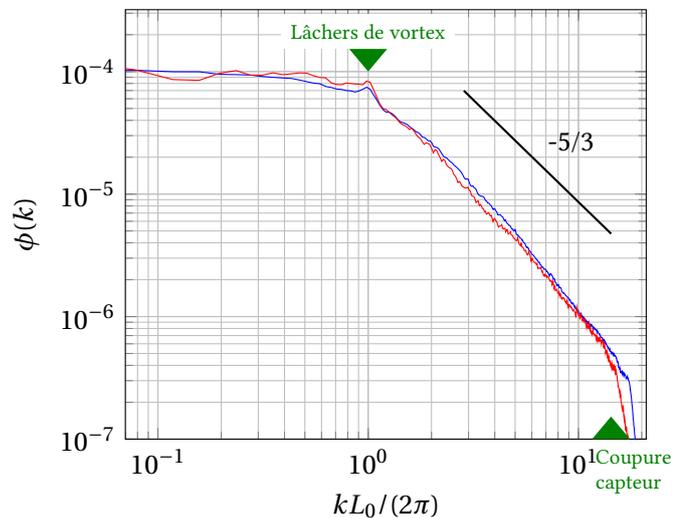


Fig 3.13 – Spectre de vitesse obtenu dans l'expérience « Toupie » à l'aide du Pitot ① pour $\langle v \rangle = 1$ m/s. Courbe rouge : $T = 2,2\text{K} > T_\lambda$, $R_\lambda \approx 1100$. Courbe bleue : $T = 1,56\text{K} < T_\lambda$. L'enregistrement à basse température est plus long (60 min) et donc mieux moyenné.

À $T = 2,2\text{K}$, où l'hélium liquide est un fluide classique, le nombre de Reynolds basé sur L_0 et la valeur

rms de la vitesse est $Re = 1,8 \times 10^5$. Le nombre de Reynolds basé sur la micro-échelle de Taylor, estimé comme,

$$R_\lambda = \sqrt{\frac{20}{3}} Re \quad (3.15)$$

vaut $R_\lambda \sim 1100$.

On applique sur le signal mesuré un filtre numérique passe-bas Butterworth d'ordre 4 pour supprimer les pics de bruits parasites (vibrations de la structure et résonance de Helmholtz du capteur). Le signal filtré est converti en signal spatial à l'aide de l'hypothèse de Taylor instantanée [PL94], c'est-à-dire qu'on déduit la vitesse à la position x de la vitesse au temps t comme,

$$v(t) = v(x) \text{ où } x = \int_0^t v(\tau) d\tau \quad (3.16)$$

Le spectre temporel brut est tracé sur la figure 2.4. Comme attendu, le spectre de puissance spatial (figure 3.13) est compatible avec une loi d'échelle de Kolmogorov en $k^{-5/3}$ et la distribution de vitesse est gaussienne à l'échelle du capteur (figure 4.1-a, page 70, détaillée au chapitre suivant). Les spectres obtenus au dessus et en dessous de T_λ sont identiques aux incertitudes de mesure près.

SPECTRE DE VITESSE DE L'EXPÉRIENCE TOUPIE

Le spectre de vitesse obtenu dans l'expérience Toupie (figure 3.13), et le signal auquel il correspond, sont très satisfaisants :

- le rapport signal sur bruit bien meilleur que celui des spectres obtenus précédemment ;
- le plateau basse fréquence est propre, ce qui suggère qu'il n'y a pas de fluctuations lentes parasites significatives ;
- les acquisitions sont longues (1 h), ce qui permet d'avoir des statistiques bien moyennées ;
- Le taux de turbulence est plus élevé que dans l'expérience « TSF », ce qui permet le bon rapport signal sur bruit mais reste assez faible (< 5 %) pour limiter les biais systématiques ;
- le nombre de Reynolds est assez élevé ($R_\lambda \approx 1100$).

Cela a permis d'aller au delà du spectre dans l'analyse présentée au chapitre suivant.

3.5 Comportement spectral à petite échelle

Dans les spectres de vitesse expérimentaux obtenus avec les expériences « TSF » et « Toupie », ainsi que dans les spectres historiques de l'expérience de référence de Maurer & Tabeling, seules les plus grandes échelles inertielles sont résolues. À l'heure actuelle, les petites échelles sont encore inaccessibles. Cependant, on peut penser que la physique diffère à petite échelle entre un écoulement classique et un écoulement quantique. Pour aller plus loin dans les échelles, on s'est tourné vers les simulations numériques.

3.5.1 Modèle numérique

On peut étudier la turbulence de l'hélium superfluide numériquement à température finie (typiquement pour $T > 1\text{K}$) en utilisant un modèle continu à deux fluides [Lan41]. L'hélium II est vu comme un mélange interpénétré de deux composantes : une composante « normale » modélisée par l'équation de Navier-Stokes, et une composante « superfluide » modélisée par l'équation d'Euler. Un terme de couplage

\vec{F}_{ns} est ajouté à ces équations. Il rend compte de la friction mutuelle entre les composantes et permet l'échange de quantité de mouvement.

Une première campagne de simulations a été menée grâce à l'expertise d'Emmanuel Lévêque de l'École Normale Supérieure de Lyon, suite à une idée conjointe de Carlo Barenghi de l'Université de Newcastle et Philippe Roche. Ce projet avait déjà donné des résultats nouveaux lorsque j'ai commencé à travailler sur cette partie [RBL09] et des développements nouveaux ont été engagés. Dans le cadre de ma thèse, j'ai traité et interprété les champs obtenus (voir figure 3.14 pour un exemple de champ simulé). Les équations simulées sont les suivantes :

$$\frac{D\vec{v}_n}{Dt} = -\frac{1}{\rho_n}\nabla p_n + \frac{\rho_s}{\rho}\vec{F}_{ns} + \frac{\mu}{\rho_n}\nabla^2\vec{v}_n + \vec{f}_n^{ext} \quad (3.17)$$

$$\frac{D\vec{v}_s}{Dt} = -\frac{1}{\rho_s}\nabla p_s - \frac{\rho_n}{\rho}\vec{F}_{ns} + \vec{f}_s^{ext} \quad (3.18)$$

où \vec{f}_n^{ext} et \vec{f}_s^{ext} sont des termes de forçage, μ est la viscosité dynamique de la composante normale. Le terme de friction mutuelle est approché au premier ordre par :

$$\vec{F}_{ns} = -\frac{B}{2}|\vec{\omega}_s|(\vec{v}_n - \vec{v}_s) \quad (3.19)$$

où $\vec{\omega}_s = \nabla \times \vec{v}_s$ est la vorticité superfluide et $B \approx 2$ est le coefficient de friction mutuelle.

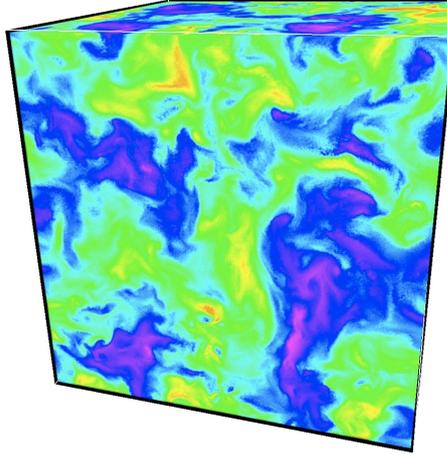


Fig 3.14 – Image instantanée de la composante x de la vitesse superfluide, $v_{s,x}$ simulée à $T = 1,44\text{K}$ ($\rho_s/\rho_n = 10$) avec une résolution 512^3 .

L'échelle de coupure de la simulation est fixée de sorte qu'elle coïncide avec l'échelle δ à laquelle les effets quantiques sont attendus. Cette échelle est estimée comme la distance inter-vortex moyenne, définie à partir du quantum de circulation κ et de la vorticité superfluide moyenne,

$$\delta^2 = \frac{\kappa}{\sqrt{\langle |\vec{\omega}_s|^2 \rangle}} \quad (3.20)$$

Cette procédure de coupure a été validée par la prédiction correcte de la densité de lignes de vortex, $L = 1/\delta^2$, en fonction du nombre de Reynolds [SRL11].

Ce modèle ne serait pas justifié à des températures très inférieures à 1 K, où la composante normale est absente. Mais ces simulations se concentrent sur la limite dite « température finie », souvent considérée valide au dessus de 1 K : cinq températures ont été simulées avec des températures comprises entre 1,15 K et 2,1565 K (voir table 3.3).

3.5.2 Spectre de vitesse

Nom	ρ_s/ρ_n	T [K]	Résolution	Re
Très Basse Température	40	1,15	1024^3	1960
Sous Basse Température	20	1,30	512^3	980
Basse Température	10	1,44	512^3	1342
Medium	1	1,96	512^3	2180
Haute Température	0,1	2,1565	512^3	2280

TABLE 3.3 – Propriétés des différentes simulations numériques exploitées dans cette thèse.

Le spectre de puissance de chacune des composantes de vitesse (normale et superfluide) est tracé sur la figure 3.15 à très basse et haute température (respectivement 1,15 K et 2,1565 K correspondant à $\rho_s/\rho_n = 40$ et $\rho_s/\rho_n = 0.1$, voir table 3.3). Afin de pouvoir comparer plus directement avec les expériences, le nombre de Reynolds est estimé avec l'échelle de forçage $L_0 = \pi$ et la vitesse « inertielle »² v_m (Eq. 2.3) :

$$Re = \frac{L_0 \sqrt{\langle v_m^2 \rangle}}{\mu/\rho} \quad (3.21)$$

Le spectre de puissance de la vitesse « inertielle » n'est pas tracé mais il est très proche de celui de la composante majoritaire (comme attendu).

La simulation à très basse température (en 1024^3) et la simulation à haute température (en 512^3) ont sensiblement le même nombre de Reynolds ($Re = 1960$ et $Re = 2280$ respectivement), bien plus petit que le nombre de Reynolds des expériences (de l'ordre de $1,8 \times 10^5$ dans le cas de l'expérience « Toupie », entre 1×10^5 et 2×10^6 dans le cas de l'écoulement de grille « TSF »). Dans tous les cas, les simulations conduisent à des spectres qui se superposent à grande échelle avec une loi d'échelle proche de $k^{-5/3}$. Ce résultat confirme numériquement les résultats expérimentaux précédents.

Cependant, les spectres s'écartent de la loi en $k^{-5/3}$ aux petites échelles. À ces échelles baptisées « méso-échelles », la composante superfluide n'est plus verrouillée à la composante normale. Sa distribution d'énergie se comporte asymptotiquement comme k^2 , ce qui est compatible avec un régime dans lequel l'équipartition domine la distribution de l'énergie à travers les échelles.

2. On a utilisé ici une valeur rms unidimensionnelle, $v_{\text{rms},1d} = \frac{v_{\text{rms},3d}}{\sqrt{3}}$ pour être plus proche des expériences.

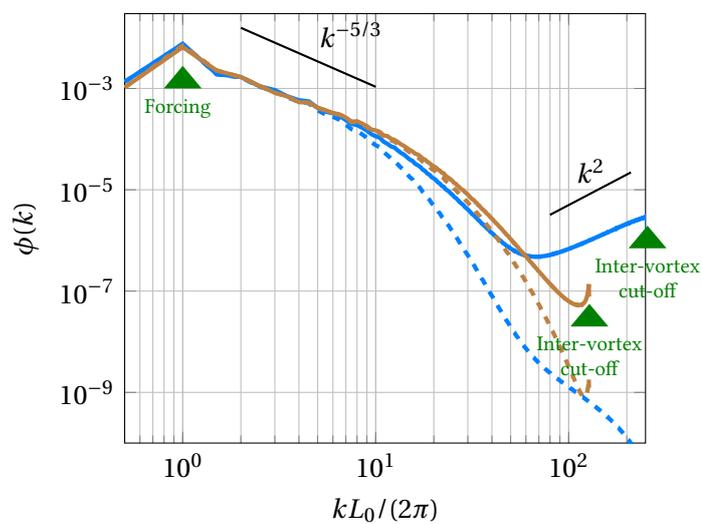


Fig 3.15 – Spectres de puissance des composantes de vitesse normale et superfluide simulées. Les lignes continues sont obtenues avec la vitesse normale \vec{v}_n , les lignes pointillées avec la composante superfluide \vec{v}_s . Le spectre bleu est obtenu à très basse température ($T = 1,15\text{K}$, $Re = 1960$, Résolution 1024^3); le spectre brun à haute température ($T = 2,1565\text{K}$, $Re = 2280$, Résolution 512^3).

4 Cascade d'énergie et intermittence

Sommaire

4.1 Mise en évidence	69
4.1.1 Expérience Toupie	69
4.1.2 Simulations numériques	71
4.2 Écart à la loi des 4/5	71
4.2.1 Viscosité effective dans la cascade	71
4.2.2 Discussion	73
4.3 Auto-similarité et intermittence	74
4.4 Conclusion	76

4.1 Mise en évidence

4.1.1 Expérience Toupie

Pour mettre en évidence l'existence d'une cascade d'énergie, il est nécessaire de calculer des statistiques au delà du spectre. Cela n'a pas été possible avec les résultats de l'expérience « TSF » parce que le signal était trop bruité. En effet, le but de l'expérience « TSF » était de générer un écoulement canonique avec un taux de turbulence faible. Cela conduit également à un signal faible.

En revanche, l'expérience Toupie a été conçue de façon à augmenter la dynamique et l'amplitude du signal mesuré : échelle intégrale plus grande, taux de turbulence plus élevé, mais néanmoins inférieur à 5 % pour ne pas trop compromettre la qualité du signal. Le rapport signal sur bruit obtenu est bien plus élevé et permet le calcul de moments d'ordre supérieurs.

Pour caractériser la cascade, on définit les incréments de vitesse longitudinaux, ici dans la même direction que l'écoulement moyen, comme,

$$\delta v(x; r) = v(x + r) - v(x) \quad (4.1)$$

La distribution de $\delta v(x; r)$ à r donné (voir figure 4.1-b), est gaussienne à grande échelle ($r = L_0$) et dissymétrique du côté négatif aux échelles plus petites ($r = L_0/10$). La dissymétrie peut être caractérisée par la *skewness* $S(r)$ de cette distribution, définie comme,

$$S(r) = \frac{\langle \delta v(r)^3 \rangle}{\langle \delta v(r)^2 \rangle^{3/2}} \quad (4.2)$$

Dans un fluide classique, notamment pour l'hélium I, $S(r)$ est directement relié au flux d'énergie à travers les échelles. La valeur numérique obtenue dans l'expérience Toupie aux plus petites échelles résolues (figure 4.2) est compatible avec la valeur classique typique de $-0,23$ (une revue des valeurs expérimentales pour R_λ compris entre 208 et 2500 est donnée dans [Che06]). Le signe dépend du sens de la cascade d'énergie. Une valeur négative indique que l'énergie cascade des grandes vers les petites échelles.

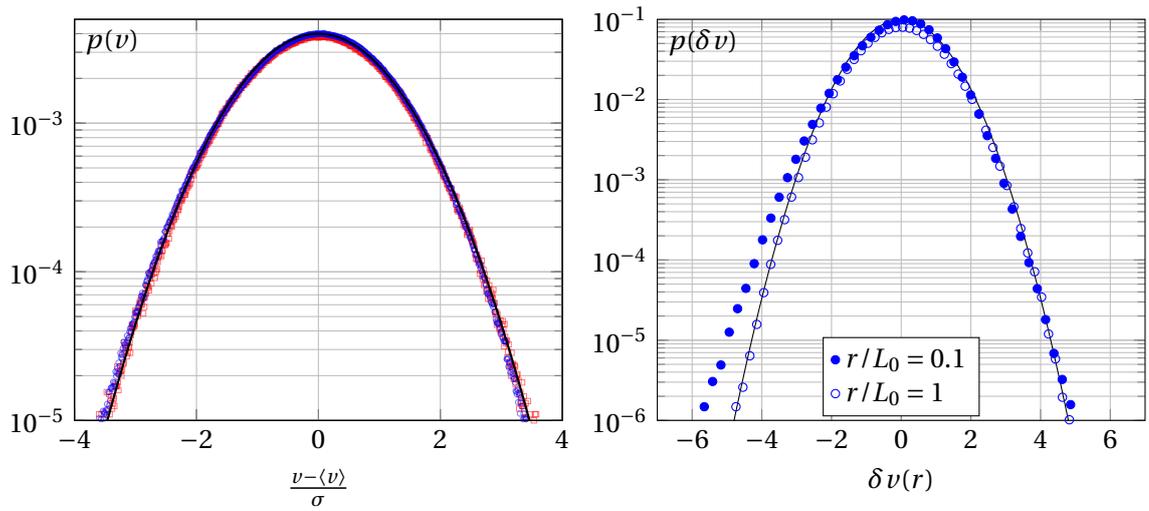


Fig 4.1 – À gauche : distribution de vitesse pour $T = 1,56\text{K} < T_\lambda$ (en bleu) et pour $T = 2,2\text{K} > T_\lambda$ (en rouge). La vitesse moyenne est identique pour les deux acquisitions, $\langle v \rangle = 1\text{ m/s}$. Ligne noire : distribution gaussienne. À droite : histogramme des incréments de vitesse longitudinaux pour $r = L_0$ (échelle de forçage) et $r = L_0/10$.

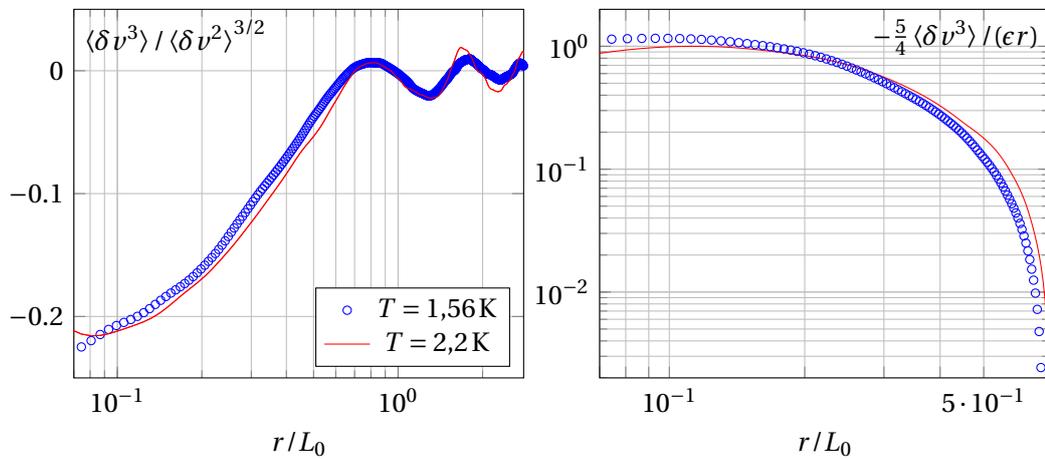


Fig 4.2 – À gauche : Skewness $S(r)$ de la distribution de l'incrément longitudinal $\delta v(r)$. À droite : Fonction de structure d'ordre 3 de l'incrément de vitesse longitudinale compensée par $-\frac{4}{5}\epsilon r$. He II à $T = 1,56\text{K}$ (cercles bleus). He I à $T = 2,2\text{K}$ (ligne rouge). Vitesse moyenne : $\langle v \rangle = 1\text{ m/s}$. L'abscisse la plus petite $r/L_0 = 7 \times 10^{-2}$ correspond à la coupure du capteur. L'oscillation à grande échelle correspond à la fréquence des lâchers de tourbillons, $f_0 = \langle v \rangle / L_0 = 16,5\text{Hz}$.

Pour $T < T_\lambda$, on constate que la valeur de la *skewness* est quasiment identique à celle obtenue pour $T > T_\lambda$. Ceci est une indication forte que l'énergie en turbulence superfluide cascade d'une façon similaire au cas de la turbulence classique.

Quantitativement, en turbulence classique, la fonction de structure d'ordre 3 est reliée au flux d'énergie à travers les échelles ϵ par la loi dite des 4/5 :

$$\langle \delta v(r)^3 \rangle = -\frac{4}{5}\epsilon r \quad (4.3)$$

Cette équation, valable pour les échelles inertielles de la cascade turbulente, est souvent donnée comme la seule loi exacte de la turbulence classique pleinement développée. Il est intéressant de voir si elle reste valable en turbulence quantique.

Pour comparer les données obtenues en turbulence quantique avec cette prédiction classique, il est nécessaire d'estimer la valeur de ϵ . Il n'est pas évident de la calculer à partir des données expérimentales car nous ne disposons pas de mesure du taux de turbulence à des positions successives comme cela était le cas pour l'expérience « TSF ». Dans ce cas, la méthode usuelle consiste à utiliser la loi des 4/5 (Eq. 4.3) qui donne une estimation raisonnable lorsque $R_\lambda \geq 1000$ [MTW99 ; IGK09]. Par ailleurs, l'expérience « TSF » a permis de montrer que ϵ ne change pas lorsque l'on passe d'un écoulement classique à un écoulement superfluide, et dans les deux cas, les mesures sont disponibles pour la même vitesse moyenne au dessus et en dessous de la transition superfluide. On estimera alors ϵ en He I en utilisant la loi des 4/5 et on utilisera cette valeur de ϵ également en He II. On trouve $\epsilon = (5,4 \pm 0,3) \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}^3$ (pour $\langle v \rangle = 1 \text{ m/s}$).

La fonction de structure d'ordre 3 compensée par la loi des 4/5 est tracée sur la figure droite 4.2. On observe un « plateau » pour presque une demi-décade d'échelles, qui correspondent aux échelles inertielles résolues. La valeur du « plateau » est comparable au dessus et en dessous de la transition superfluide, aux erreurs expérimentales près de l'ordre de 25 %. C'est une preuve expérimentale que la loi des 4/5 (Eq. 4.3) reste valable en turbulence superfluide, au moins pour les échelles inertielles les plus grandes.

4.1.2 Simulations numériques

On peut calculer la vitesse « inertielle » $\vec{v}_m = (\rho_n/\rho)\vec{v}_n + (\rho_s/\rho)\vec{v}_s$ (Eq. 2.3) à partir des champs de vitesse simulés. Ensuite, on calcule la fonction de structure d'ordre 3 en moyennant le long des trois directions dans un *snapshot* (instantané) de l'écoulement (voir figure 3.14). Le résultat est tracé sur la figure 4.3, compensé par la loi des 4/5 pour la température la plus basse et la plus haute. La valeur de ϵ est un paramètre de la simulation. Les deux graphes comportent une région où la courbe atteint un maximum proche de 1. En accord avec le résultat expérimental, ceci peut être interprété comme une preuve d'une gamme d'échelle dans laquelle l'énergie cascade. Comme attendu en turbulence classique à nombre de Reynolds modéré [IGK09], il n'y a pas de séparation claire entre les dynamiques inertielle et dissipative, donc on n'obtient pas un plateau étendu et la valeur du maximum est inférieure à 1.

À haute température, le comportement à petite échelle se comporte typiquement en r^2 , ce qui correspond à la limite linéaire $\delta u(r) \sim r$. En revanche, à très basse température, le champ de vitesse n'est plus lisse à petite échelle. Il présente des fluctuations irrégulières jusqu'aux plus petites échelles à cause du bruit dû à l'équipartition. Cela conduit à un comportement différent de $\langle \delta v(r)^3 \rangle$ à petite échelle.

4.2 Écart à la loi des 4/5

4.2.1 Viscosité effective dans la cascade

Dans cette partie, on s'intéresse à l'écart à petite échelle à la loi des 4/5. En turbulence classique, c'est la viscosité qui est à l'origine de cette déviation. L'équation exacte peut être obtenue à partir de l'équation

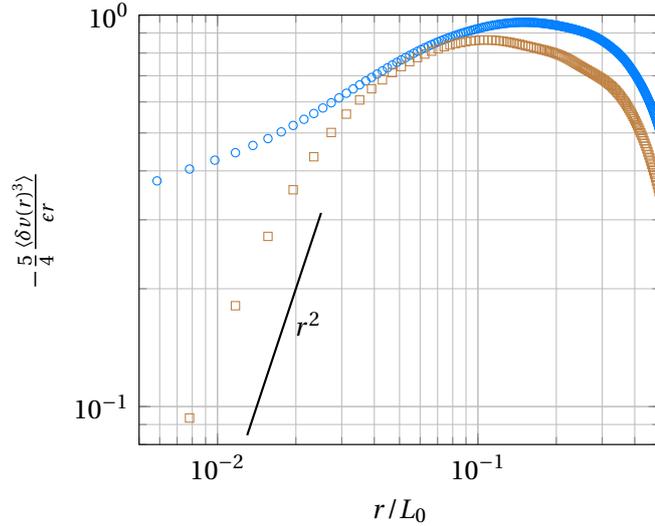


Fig 4.3 – Fonction de structure d'ordre 3 compensée obtenue à partir des champs simulés à haute température (2,1565 K, carrés brun) et à très basse température (1,15 K, cercles bleu clair) pour à peu près le même nombre de Reynolds (respectivement 2280 et 1960).

de Kármán-Howarth et permet de généraliser la loi des 4/5 à petite échelle :

$$\langle \delta v(r)^3 \rangle + \frac{4}{5} \epsilon r = 6\nu \frac{d\langle \delta v(r)^2 \rangle}{dr} \quad (4.4)$$

Physiquement, le membre de droite de l'équation 4.4 correspond à l'énergie qui est dissipée dans la cascade à cause de la viscosité. De façon analogue, on peut définir une viscosité cinématique effective dans l'He II à partir de l'écart à la loi des 4/5 aux petites échelles inertielles. Pour cela, on définit $\mathcal{N}(r)$ comme,

$$\mathcal{N}(r) = \frac{\langle \delta v^3 \rangle + \frac{4}{5} \epsilon r}{6 \frac{d\langle \delta v^2 \rangle}{dr}} \quad (4.5)$$

Dans un fluide Navier-Stokes, l'équation 4.4 conduit à ce que $\mathcal{N}(r)$ corresponde à la viscosité cinématique μ/ρ à partir du « milieu » de la gamme d'échelles inertielles jusqu'aux plus petites échelles.

Les valeurs de $\mathcal{N}(r)$ calculées à partir des champs de vitesse simulés v_m en He II sont tracées sur la figure 4.4 normalisées par μ/ρ . Pour toutes les températures, comprises entre 1,15 K ($\rho_s/\rho_n = 40$) où la composante superfluide domine et 2,1565 K ($\rho_s/\rho_n = 0.1$) où la composante normale domine, ce graphe présente un « plateau » dans la zone inertielle, de façon assez analogue au cas d'un fluide Navier-Stokes. Ceci implique que l'écart à la loi des 4/5 peut être décrit, dans une certaine mesure, par une viscosité effective, et ce jusqu'aux plus basses températures, bien que la densité de la composante normale puisse être négligeable. Ceci montre que le terme de friction mutuelle dans l'équation du superfluide (Eq. 3.17), bien que proportionnel à ρ_n/ρ ne peut pas être négligé, même dans la limite très basse température, et qu'il imite, dans une certaine mesure, un terme visqueux le long de la cascade. Cependant, $\mathcal{N}(r)$ s'écarte d'un plateau aux plus petites échelles, où les deux composantes ne sont plus verrouillées, notamment à très basse température (cercles bleu clair). Ceci est différent du cas classique pour lequel on obtiendrait un plateau jusqu'aux plus petites échelles [MTW99].

La valeur du plateau permet de définir une viscosité effective ν_{visc} . Les valeurs obtenues pour ν_{visc} pour différentes températures et différents nombres de Reynolds sont données sur la figure 4.4 compensées par

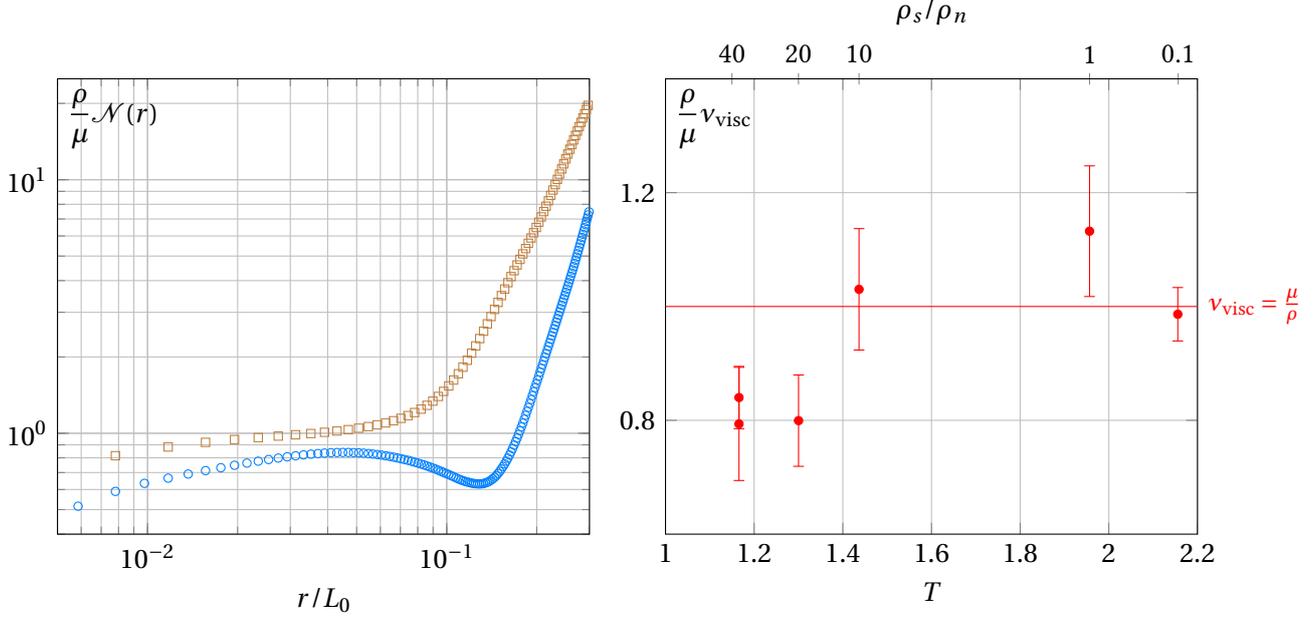


Fig 4.4 – Viscosité effective v_{visc} obtenue à partir des champs simulés compensée par la viscosité de la composante normale μ/ρ . À gauche : $\mathcal{N}(r)$ à haute température (carrés brun) et à très basse température (cercles bleu clair) pour le même nombre de Reynolds. À droite : v_{visc} pour toutes les simulations à différentes températures et différents nombres de Reynolds

μ/ρ . Il est remarquable que cette viscosité effective coïncide avec la viscosité dynamique de la composante normale normalisée par la densité totale à 20 % près à toutes les températures. Par conséquent, ces simulations montrent que l'He II se comporte comme un fluide visqueux dans la zone inertielle de la cascade turbulente, lorsque les deux composantes sont quasi-verrouillées, même aux plus basses températures où la fraction de fluide normal est inférieure à 3 %.

4.2.2 Discussion

Il est intéressant de comparer la viscosité obtenue v_{visc} à la viscosité effective v_{eff} définie habituellement dans la littérature [VN02],

$$\epsilon = v_{\text{eff}} \left(\frac{\kappa}{\delta^2} \right)^2 \simeq v_{\text{eff}} |\omega_s|^2 \quad (4.6)$$

Cette viscosité effective est compatible avec v_{visc} à haute température [NSD05], ce qui peut se comprendre en écrivant que les deux composantes sont quasi-verrouillées jusqu'aux échelles dissipatives (visqueuses) :

$$v_{\text{eff}} = \epsilon |\omega_s|^{-2} \simeq \epsilon |\omega_n|^{-2} = \frac{\mu}{\rho_n} \simeq \frac{\mu}{\rho} = v_{\text{visc}} \quad (4.7)$$

Cependant, les expériences montrent que v_{eff} s'écarte de cette « viscosité visqueuse » v_{visc} lorsque la température diminue [NSD05 ; CGS07 ; WG08]. Elle s'approche alors d'une « viscosité de friction » $v_{\text{frict}} = \kappa \frac{\rho_n B}{2\rho}$. Cette viscosité peut être obtenue à partir des équations 3.17 et 3.18, en supposant que les composantes sont déverrouillées à petite échelle, ce qui conduit à la friction d'une composante sur l'autre [RBL09] (une démonstration microscopique est donnée dans [VN02]). Par conséquent, la définition de v_{eff} inclut les deux mécanismes de dissipation qui existent dans l'He II à température finie : la dissipation visqueuse, v_{visc} que nous avons discutée plus haut, et la dissipation de friction, v_{frict} . Il serait intéressant de

comprendre comment cette viscosité effective empirique ν_{eff} (Eq. 4.6) dépend du poids relatif de ces deux mécanismes de dissipation, et également du troisième mécanisme pertinent dans la limite température nulle : l'émission de phonons par les lignes de vortex [NAB97 ; Vin00 ; Lea01].

Une perspective de ce travail serait d'améliorer la compréhension des mécanismes qui conduisent à un comportement quasi-visqueux : on peut penser à une analogie possible avec les modèles classiques du type « Euler tronqué », dans lesquels la présence d'un réservoir d'excitations équiréparties à petite échelle se comporte comme une viscosité moléculaire aux plus grandes échelles [KC89 ; Cic05 ; BB06].

SIMULATIONS NUMÉRIQUES

- Le modèle continu de l'hélium II conduit à une cascade d'énergie quantitativement compatible avec la loi des 4/5 classique ;
- L'écart à la loi des 4/5 permet de définir une viscosité effective, même aux plus basses températures. La viscosité obtenue est proche de celle de la composante normale.

4.3 Auto-similarité et intermittence

Pour aller plus loin, on s'intéresse aux moments d'ordre supérieur. Notamment à l'exposant $\zeta(n)$ des fonctions de structure. Une seule mesure expérimentale de $\zeta(n)$ en He II existe dans la littérature pour un écoulement de Von Kármán [MT98] mais l'expérience en He II n'est pas comparée directement avec la même expérience en He I (même capteur dans le même écoulement).

Les valeurs calculées à partir des données de l'expérience « Toupie » et à partir du champ \vec{v}_m obtenu par les simulations numériques sont tracées sur la figure 4.5. Le résultat expérimental pour $T > T_\lambda$ conduit à un exposant $\zeta(n)$ qui s'écarte de la prédiction de Kolmogorov 1941 en $n/3$. Cela signifie que l'écoulement présente de l'intermittence. Les mesures obtenues dans la même conduite, avec le même capteur, pour la même vitesse moyenne mais pour $T < T_\lambda$ conduisent à des exposants qui coïncident aux barres d'erreur près avec ceux obtenus pour $T > T_\lambda$. Cela suggère que l'intermittence dans ce type d'écoulement ne change pas lorsque l'on franchit la température de transition superfluide.

Nos simulations numériques du modèle continu de l'hélium II conduisent, pour toutes les températures, à des exposants identiques. Ces exposants sont quantitativement compatibles avec le modèle d'intermittence de She & Lévêque [SL94].

INTERMITTENCE

- Mesures expérimentales : $\zeta(n) \neq n/3$ en He I et He II, l'intermittence dans l'écoulement superfluide semble similaire à celle dans l'écoulement classique ;
- Simulations numériques : même résultat et bon accord avec le modèle d'intermittence de She & Lévêque.

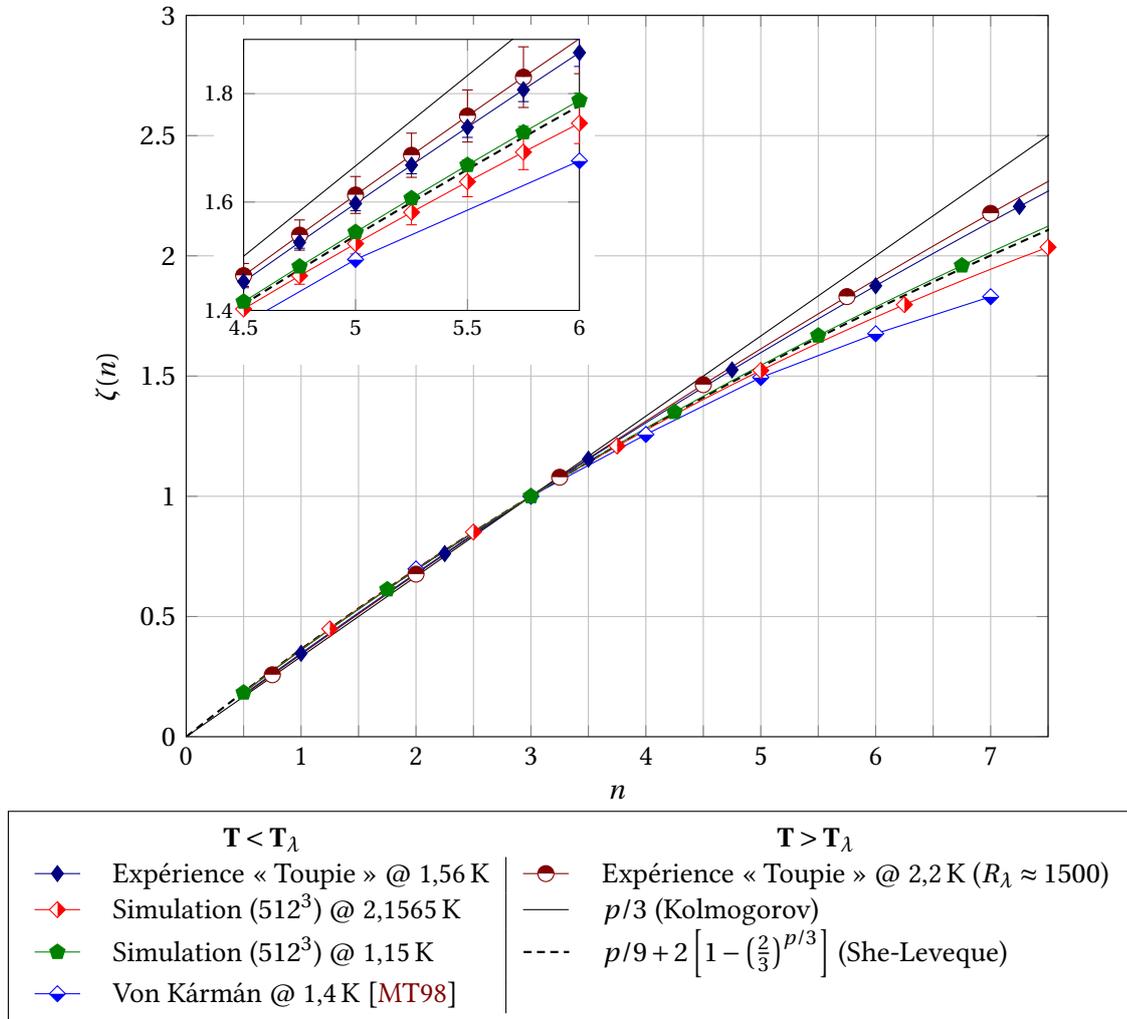


Fig 4.5 – Exposant de la fonction de structure des incréments de vitesse absolus longitudinaux $\zeta(n)$. Insert : zoom pour $4,5 < n < 6$ avec barres d'erreurs. Pour la lisibilité, la figure principale ne comporte qu'un symbole sur cinq.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré que la loi des 4/5 reste valable en turbulence superfluide (i) expérimentalement à partir de mesures de fluctuations de vitesse dans la soufflerie « Toupie » réalisées avec des tubes de Pitot miniatures, et (ii) numériquement à l'aide de simulations numériques continues. Cela montre que l'énergie se propage des grandes vers les petites échelles, comme dans l'image classique de la cascade de Richardson.

De plus, il émerge une gamme d'échelle dans laquelle les deux composantes sont encore verrouillées et où on observe un écart à la loi des 4/5 similaire à la correction visqueuse classique. La composante superfluide hérite alors de la viscosité de la composante normale.

Enfin, les moments d'ordre supérieur, $\zeta(p)$ avec $p > 3$, obtenus expérimentalement et numériquement ont des valeurs « anormales », quantitativement similaires à celles de la turbulence classique. Cela suggère que l'intermittence dans l'hélium superfluide est comparable à l'intermittence qui existe dans un fluide classique.

5 Fluctuations de vorticité

Sommaire

5.1 Motivation physique	77
5.2 Mesures de vorticité en soufflerie	78
5.2.1 Technique de mesure	78
5.2.2 Dispositif expérimental	79
5.2.3 Densité moyenne de lignes de vortex	82
5.3 Spectres de vorticité	83
5.3.1 Mesures expérimentales	83
5.3.2 Simulations numériques	84
5.3.3 Conclusion	86

5.1 Motivation physique

Dans un fluide classique, la vorticité $\vec{\omega}(\vec{x}, t)$ traduit la quantité de « rotation solide » locale dans le fluide. Elle est reliée au champ de vitesse $\vec{v}(\vec{x}, t)$ par la relation :

$$\vec{\omega}(\vec{x}, t) = \nabla \times \vec{v}(\vec{x}, t) \quad (5.1)$$

Cette relation peut se réecrire dans l'espace de Fourier comme :

$$\vec{\omega}(\vec{k}, t) = \vec{k} \times \vec{v}(\vec{k}, t) \quad (5.2)$$

On peut en déduire que la loi attendue pour le spectre de puissance des fluctuations de vorticité, $P_{\omega\omega}$, dans un fluide classique, est en $k^{1/3}$, pour les échelles inertielles :

$$P_{\omega\omega} = \vec{k}^2 P_{vv} \sim \vec{k}^2 \|\vec{k}\|^{-5/3} \sim \|\vec{k}\|^{1/3} \quad (5.3)$$

où P_{vv} est le spectre de puissance des fluctuations de vitesse.

Cependant, cette prédiction n'est valable que pour le spectre 3D des fluctuations de $\vec{\omega}$. En pratique, on calcule le spectre expérimental à partir d'une mesure en un point et on utilise l'hypothèse de turbulence gelée pour convertir la série temporelle en fluctuation spatiale (voir figure 1.3). Dans ce cas, il s'agit d'un spectre 1D et la relation 5.3 n'est plus valable. Les mesures expérimentales disponibles dans la littérature (en utilisant des 9, 12 et 20 fils-chauds) conduisent à un spectre (1D) plat ou légèrement décroissant [BVW87 ; ZAC05]. Cette dépendance « plate » se retrouve aussi dans des simulations numériques [KA93].

On s'intéresse maintenant au cas d'un fluide quantique. La composante superfluide est irrotationnelle en tout point sauf le long des lignes de vortex quantiques.   l'aide de mesures de second son, il est possible de mesurer directement la densité de lignes de vortex dans l'hélium II. Cette mesure permet de calculer la valeur absolue de la vorticité locale du superfluide orthogonale à l'onde test de température, $|\vec{\omega}_{s,\perp}|$. Une mesure de ce type a été réalisée en 2007 à Grenoble,   $T = 1,6\text{K}$ ($\rho_s/\rho = 83\%$), avec un capteur local sub-millimétrique. Elle a conduit à un résultat diff rent du résultat classique : contrairement à un

fluide classique dans lequel on attendrait un spectre quasi-plat, le spectre obtenu pour $|\vec{\omega}_{s,\perp}|$ présente une loi d'échelle compatible avec une décroissance en $k^{-5/3}$ [Roc07].

Ce résultat surprenant a été interprété en décomposant le champ de vorticité $\vec{\omega}_s$, en un champ lisse, « polarisé », $\vec{\omega}_{\parallel}$, et un champ additionnel $\vec{\omega}_s - \vec{\omega}_{\parallel}$ [RB08]. Le premier rend compte de la vorticité aux échelles grandes devant la distance inter-vortex ; tandis que le second porte le « bruit » à petite échelle. On associe à $\vec{\omega}_{\parallel}$ une densité de lignes de vortex $L_{\parallel} = |\vec{\omega}_{\parallel}|/\kappa$. On définit $L_{\times} = L - L_{\parallel}$ qui correspond au champ non polarisé. Lorsque $L_{\times} \gg L_{\parallel}$, le spectre de densité de lignes de vortex est dominé par la contribution de L_{\times} et il a été justifié que ce champ présente certaines caractéristiques de scalaire passif, en particulier un spectre en $k^{-5/3}$.

  partir des simulations numériques, nous avons constaté au chapitre 3 que les deux composantes de l'hélium II (la composante normale et la composante superfluide) sont verrouillées à grande échelle et qu'elles « glissent », à basse température, à une échelle plus petite, baptisée « méso-échelle ».   ces méso-échelles, l'énergie du superfluide présente des caractéristiques d'équipartition (spectre d'énergie asymptotiquement en k^2).

On peut relier l'interprétation théorique du spectre de vorticité introduisant L_{\times} et L_{\parallel} avec cette observation numérique : le champ polarisé L_{\parallel} permet de rendre compte de la vorticité moyenne du superfluide aux échelles où les deux composantes sont verrouillées. Le champ aléatoire L_{\times} correspond aux excitations  quiparties qui apparaissent aux méso-échelles.

La mesure locale de densité de lignes de vortex de 2007 a été réalisée à $T = 1,6\text{K}$.   cette température, le spectre est dominé par L_{\times} , ce qui permet d'interpréter le spectre obtenu comme celui d'un scalaire passif (c'est-à-dire un spectre de « traceurs » advect s par la vitesse), donc en $k^{-5/3}$. Pour des raisons expérimentales précisées plus loin, il n'était pas possible dans l'expérience de 2007 de réaliser une mesure à une température différente de 1,6 K.

Lorsque la température augmente, l'équipartition aux méso-échelles tend à disparaître car la plage de méso-échelles devient plus petite. Les phénomènes d'équipartition évoqués plus haut sont alors atténués par la viscosité. Par conséquent, on s'attend à ce que le poids de L_{\times} par rapport à L_{\parallel} diminue lorsque la température augmente. Cependant, cet effet n'a encore jamais été observé. C'est la raison pour laquelle on souhaite reproduire la mesure de densité de lignes de vortex sur une plage de température plus large.

5.2 Mesures de vorticité en soufflerie

5.2.1 Technique de mesure

Afin de réaliser une mesure *locale* de la densité de lignes de vortex, on utilise un micro-résonateur à second son (ou *pince à second son*). La pince à second son consiste en uneavit  résonante sub-millimétrique réalisée à l'aide d'un chauffage et un thermomètre placés en regard (voir annexe 5.3.3). Cette idée a été proposée par Patrick Tabeling. Les travaux précurseurs engagés à l'ENS par Hervé Willaime et Patrick Tabeling ont été prolongés par Philippe Roche   Grenoble quelques années avant le début de ma thèse [Roc07]. Afin d'obtenir la sensibilité la plus élevée possible, cette pince à second son utilisait un thermomètre en aluminium granulaire qui devient supraconducteur à 1,6 K : la mesure est réalisée sur la transition, où la sensibilité est très élevée. Mais cette technologie ne permet d'obtenir une mesure qu'à une seule température.

Dans le cadre de ma thèse, j'ai utilisé une pince à second son qui utilise une technologie différente de celle utilisée par le passé : elle utilise un thermomètre or-étain, mis au point à Grenoble puis réalisé par l'IEF d'Orsay, qui a une réponse moins sensible mais sur une plage de température plus large (entre 1,3 K et 2,2 K, voir annexe 4) : la sensibilité est de l'ordre de $T/R \cdot \partial R/\partial T \sim 4.5$ contre ~ 30 pour la pince utilisée en 2007. Le chauffage est constitué d'un dépôt de chrome réalisé par l'ESIEE.

L'onde de second son obtenue est atténuée par les lignes de vortex situées dans le volume de mesure. On peut calculer la densité de lignes de vortex en mesurant le taux d'atténuation par unité de longueur ξ_{VLD} (voir paragraphe 1.3.2). Il est relié à la densité de lignes de vortex projetées L_{\perp} par la relation,

$$\xi_{\text{VLD}} = \frac{B\kappa L_{\perp}}{4c_2} \quad (5.4)$$

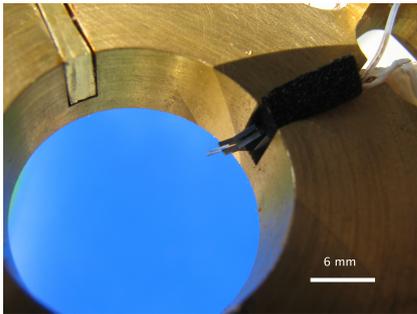
où B est la constante de friction mutuelle¹. La relation qui relie ξ_{VLD} au rapport de l'amplitude de l'onde de second son sous écoulement et hors écoulement $\Delta T/\Delta T_0$ est :

$$\xi_{\text{VLD}} = \frac{1}{D} \left(\text{asinh} \left(\frac{\Delta T_0}{\Delta T} \sinh \left(\frac{\pi}{2Q} \right) \right) - \frac{\pi}{2Q} \right) \quad (5.5)$$

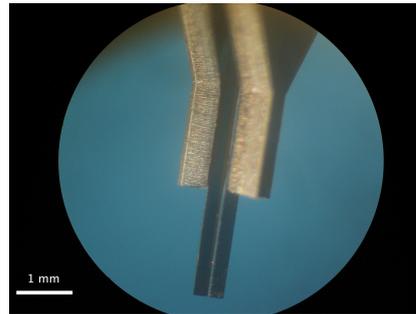
où Q est le facteur de qualité du résonateur, D est la distance entre les plaques qui constituent la pince. La démonstration de la relation 5.5, ainsi que la description précise de l'assemblage de la pince à second son et sa caractérisation sont données dans l'annexe 5.3.3.

5.2.2 Dispositif expérimental

On réalise une série d'acquisitions dans un mini-circulateur d'une géométrie proche de celle utilisée par le passé. Il s'agit d'un dispositif expérimental souple, plus rapide à refroidir que l'expérience Toupie. Il est équipé d'une bague d'instrumentation adaptée (avec possibilité d'étanchéité) similaire (et compatible) avec celle de l'expérience Toupie. La pince à second son, placée dans cette bague, est aussi peu invasive que possible (voir figures 5.1 et 5.2).



(a) Pince à second son dans la bague d'instrumentation



(b) Détail de la pince à second son observée à la loupe bino-culaire (vue de à biais à)

Fig 5.1 – Photos de la pince à second son.

L'amplitude de l'onde de second son, $\Delta T \approx 1 \text{ mK}_{\text{rms}}$, est mesurée avec une électronique basée sur une détection synchrone (voir schéma électronique sur la figure 5.3) : un courant sinusoïdal de fréquence f (de l'ordre de 20 kHz) dans le chauffage en chrome (de résistance $R_{\text{Cr}} = 1,91 \text{ k}\Omega$   1,6 K). La puissance  mise, de l'ordre de 0,5 mW, génère une onde de température de fréquence $2f$. On utilise donc la détection synchrone sur le deuxième harmonique. La plupart des acquisitions ont été réalisées avec une détection synchrone LI 5640 de marque à NF Corporation  . Les acquisitions sur une grande plage de fréquence ont été réalisées avec une détection synchrone 7280 de marque à Signal Recovery  .

1. Les valeurs de B ont été mesurées par le passé sur une large gamme de température et de fréquence [MS82 ; BD83]. Dans la suite, on utilise une extrapolation linéaire en fréquence des données obtenues par Charles E. SWANSON, et collaborateurs [Swa87].

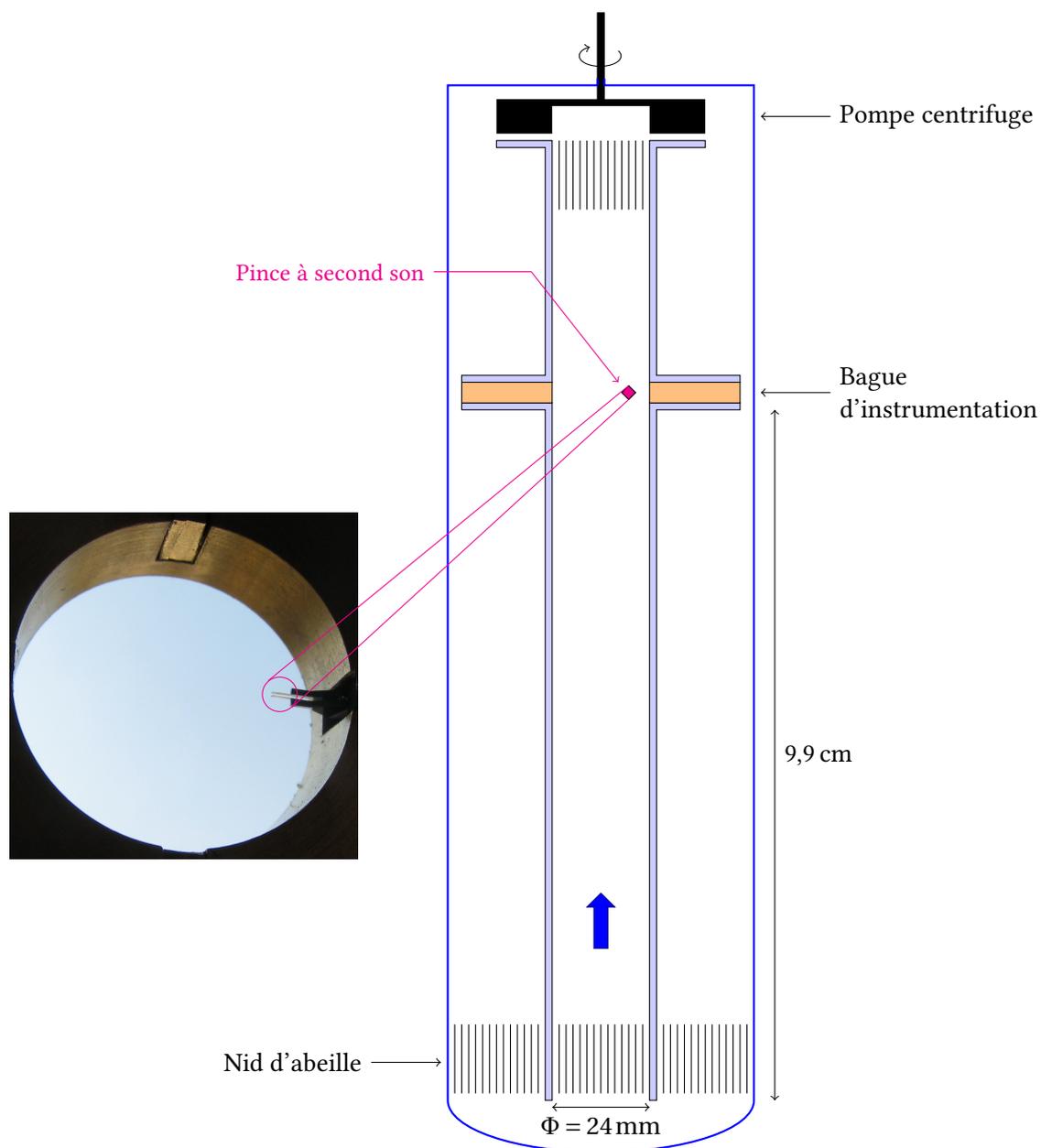


Fig 5.2 – Schéma du mini-circulateur et de la pince à second son dans sa bague d'instrumentation. Dimensions de la pince à second son : languettes de $1500 \mu\text{m} \times 380 \mu\text{m}$ placées en regard. Distance entre les languettes : $D = 270 \mu\text{m}$.

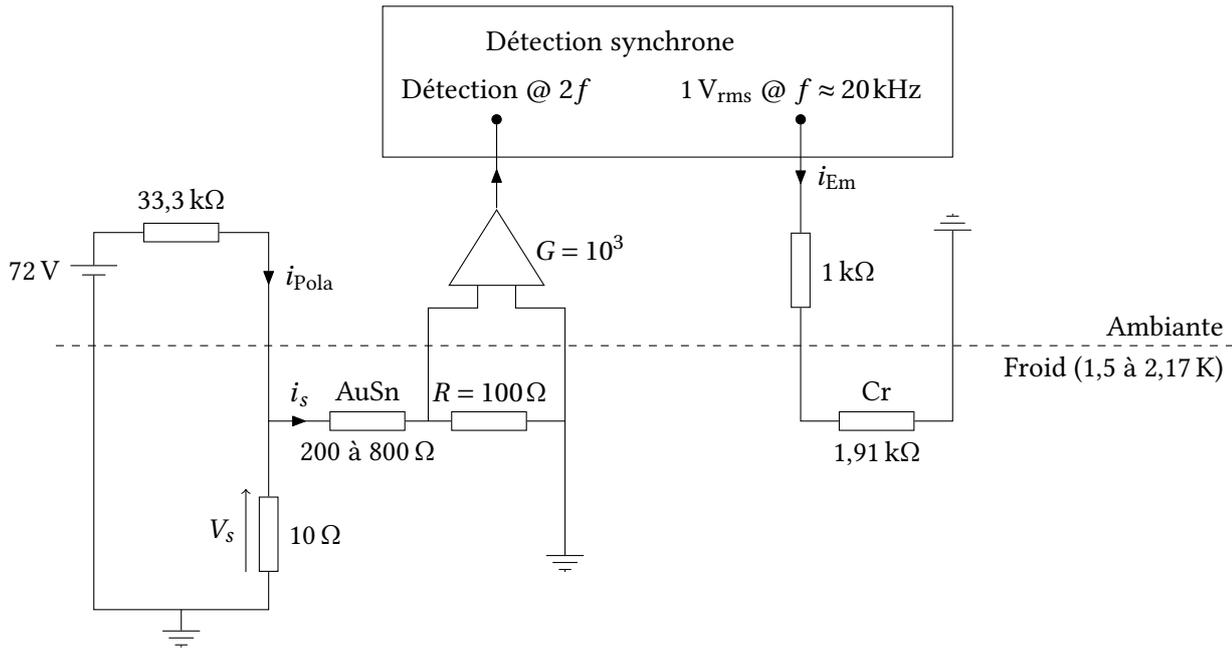


Fig 5.3 – Circuit électronique mis en œuvre pour détecter l'amplitude de l'onde de second son. L'émetteur est « polarisé » avec un courant i_{Em} de fréquence f , ce qui produit un flux de chaleur $\mathcal{P} = Ri_{Em}^2$ de fréquence $\nu = 2f$ (donc un forçage ν pour l'onde de second son). Le thermomètre est polarisé par la tension V_{Pola} généré par un bloc de piles de 72 V. Le courant dans le thermomètre est mesuré aux bornes d'une résistance de 100Ω à froid et amplifié par un pré-ampli d'instrumentation "EPC1B" de bruit de l'ordre de $1 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$ et de gain ajustable 10^2 , 10^3 ou 10^4 .

5.2.3 Densité moyenne de lignes de vortex

Afin de valider le fonctionnement de la nouvelle pince à second son, on cherche à comparer la densité moyenne de lignes de vortex obtenue avec les valeurs expérimentales disponibles dans la littérature, dans la plage 1,6 – 2,0 K [Wal88a], pour 1,5 K, 1,8 K et 2,0 K [HS92] et pour 1,6 K [Roc07]. Dans la pratique, on trace la distance inter-vortex, δ , (Eq. 1.30) en fonction du nombre de Reynolds basé sur le quantum de circulation $\kappa = 2\pi\hbar/m_{\text{He}}$,

$$Re_{\kappa} = \frac{L_0 v_{\text{rms}}}{\kappa} \quad (5.6)$$

où L_0 est l'échelle intégrale longitudinale et v_{rms} est la fluctuation de vitesse due à la turbulence. Par définition du taux de turbulence,

$$v_{\text{rms}} = \tau \langle v \rangle \quad (5.7)$$

En l'absence de mesure de v_{rms} , par exemple pour le type d'écoulement utilisé ici, qui n'est pas équipé d'anémomètre, on estime v_{rms} en prenant $\tau = 15\%$ et $L_0 = 24$ mm. Cela signifie qu'il ne faut pas s'attacher à la valeur précise obtenue et une mésestimation d'un facteur 2 sur v_{rms} est possible. La vitesse moyenne est de l'ordre de 1 m/s.

Comme on le voit sur la figure 5.4, l'atténuation observée avec notre pince à second son est compatible avec les valeurs de la littérature et avec l'ajustement empirique,

$$\frac{\delta}{L_0} \approx 0.5 Re_{\kappa}^{-3/4} \quad (5.8)$$

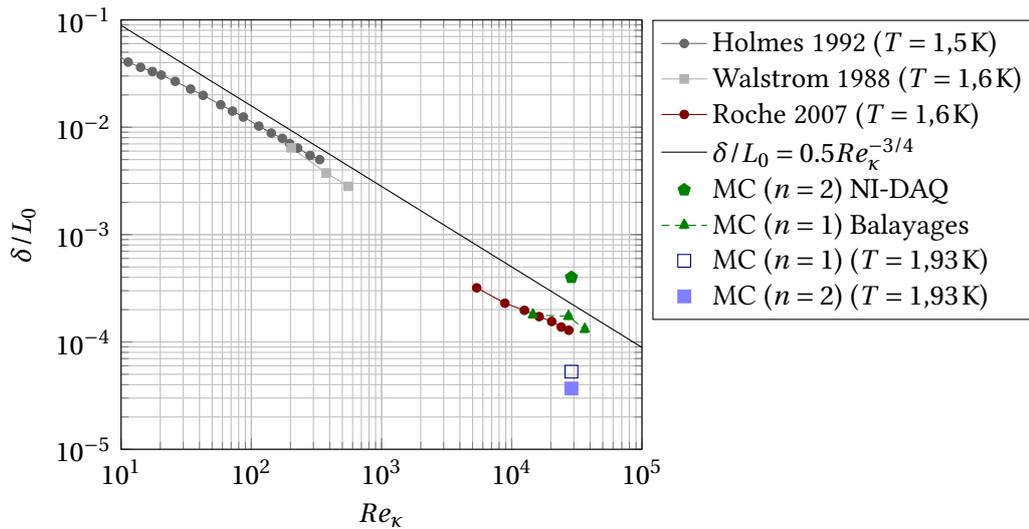


Fig 5.4 – Mesures expérimentales de l'espace inter-vortex obtenues pour $T < 1,75$ K dans le mini-circulateur (MC) avec la pince à second-son, comparées aux valeurs de la littérature. Le point « NI-DAQ » est calculé à partir de la moyenne d'un enregistrement temporel sur le second harmonique. Les points « Balayages » sont obtenus à partir de balayages en fréquence autour du premier harmonique comme indiqué sur la figure 10 en annexe. Les points \square et \blacksquare correspondent aux valeurs calculées sur la figure 10 en annexe. Ils ne sont pas a priori comparables avec les autres points car obtenus à une température significativement plus élevée.

Cependant, on constate un écart significatif entre le point \blacklozenge et les points \blacktriangleleft , pourtant obtenus à la même température et pour la même vitesse moyenne dans la même conduite. Une hypothèse est que des vortex restent accrochés sur les languettes de la pince, ce qui pourrait conduire à un effet de mémoire. Le

résultat absolu pourrait alors dépendre en partie de l'historique dans la conduite. Les pinces précédentes n'avaient pas d'effet mémoire aussi marqué, peut-être pour des raisons géométriques : cette nouvelle pince est 2,6 fois moins large donc l'influence des bords est sans doute plus importante.

5.3 Spectres de vorticité

5.3.1 Mesures expérimentales

Afin de réaliser une mesure de fluctuations de vorticité, on acquiert la sortie rapide de la détection synchrone à l'aide d'une carte d'acquisition « National Instruments » NI-6289². On s'attend, au moins à $T = 1,6\text{K}$, à retrouver le comportement observé en 2007, c'est-à-dire un spectre décroissant, proche de $f^{-5/3}$.

Dans la suite, on note $s(t)$ le signal temporel obtenu à partir de la mesure de ΔT , calculé avec les formules 5.4 et 5.5. On peut obtenir un bruit $b(t)$ dans les mêmes conditions et avec la même chaîne de mesure mais sans écoulement. Le spectre de puissance de $b(t)$, noté $P_{bb}(f)$, correspond à un bruit blanc de l'ordre de $10^{17}\text{ m}^{-4}/\text{Hz}$ (voir figure 5.5). Cette valeur est plus élevée que celle obtenue en 2007, de l'ordre de $5 \times 10^{15}\text{ m}^{-4}/\text{Hz}$. Cela peut provenir de la technologie de thermométrie, presque 10 fois moins sensible que celle utilisée en 2007 mais explorant une gamme de température bien plus large, de 1,3 K   2,2 K (voir 5.2.1).

L'atténuation de la résonance provoquée par l'écoulement dans ces acquisitions est inférieure à 10 % et la fluctuations d'atténuation est inférieure à 10 % de l'atténuation moyenne. Par conséquent, on peut linéariser la relation entre $\Delta T(t)$ et $s(t)$, et donc supposer que le bruit est additif :

$$s(t) = L(t) + b(t) \quad (5.9)$$

où $L(t)$ est le signal de densité de ligne de vortex que l'on cherche à mesurer. Dans ce cas, on obtient une relation simple entre le spectre de densité de lignes de vortex P_{LL} et les spectres des signaux bruts P_{ss} et des signaux de bruit P_{bb} acquis systématiquement pour chaque condition.

La pente du spectre obtenu est proche de $f^{-5/3}$   basse température ($T = 1,69\text{K}$, $\rho_s/\rho = 77\%$) et tend à légèrement s'aplatir lorsque la température augmente. L'exposant effectif varie de $-1,66$   $1,69\text{K}$ à $-0,95$   $2,01\text{K}$ sur la plage de fréquence comprise entre 100 et 500 Hz. Le spectre en $-5/3$ correspond à un plateau sur la figure 5.5. Un spectre avec une pente moins importante (en valeur absolue) correspond à une ligne croissante.

On retrouve donc le résultat de 2007 à basse température et on trouve que la pente du spectre évolue avec la température dans le sens attendu par l'interprétation donnée en introduction : le spectre est dominé à basse température par le champ L_x qui se comporte comme un scalaire passif. Lorsque la température augmente, le poids de L_x diminue et le spectre s'approche d'un spectre plus plat.

FLUCTUATIONS DE VORTICITÉ

- Confirmation du spectre en $f^{-5/3}$   basse température ;
- Première mise en évidence expérimentale de la dépendance en température de la loi d'échelle du spectre de vorticité superfluide.

2. La fonction de transfert a été préalablement mesurée en simulant le comportement de la pince à second son avec deux mixers Mini-Circuits ZAD-8

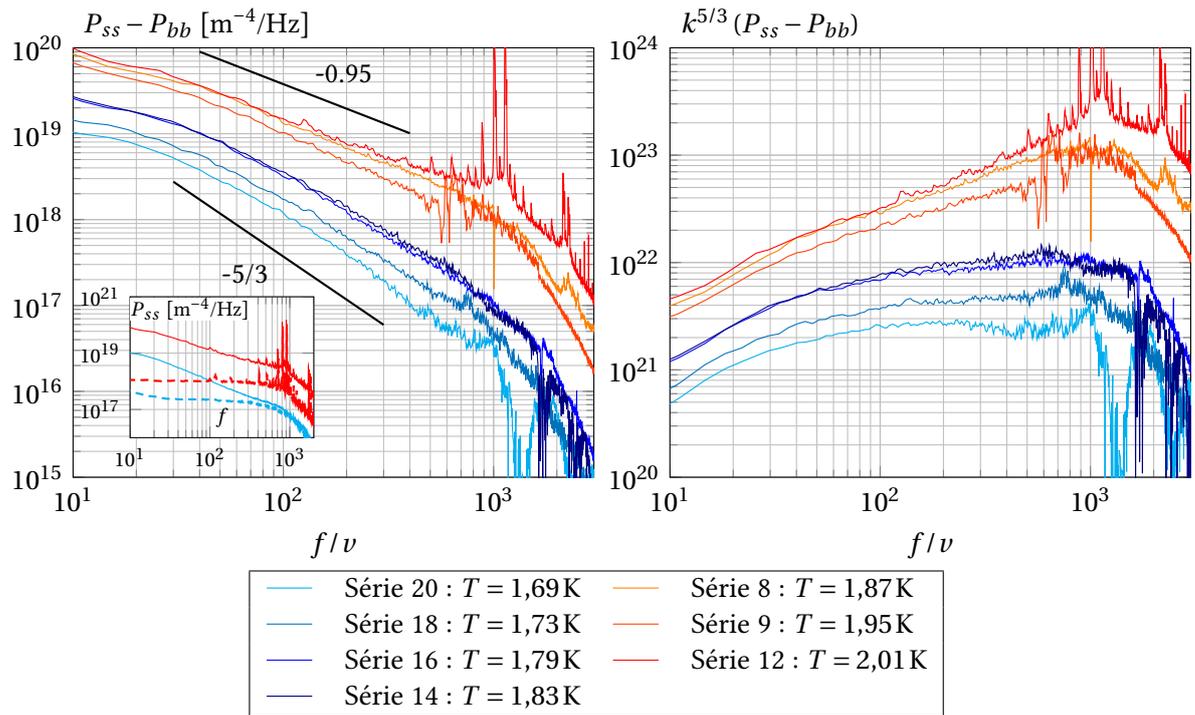


Fig 5.5 – Spectres de vorticité, $P_{LL} = P_{ss} - P_{bb}$, obtenus avec la pince à second son, pour différentes températures, et pour une vitesse moyenne de 0,8 m/s. La pente varie entre $-5/3$ à basse température, jusqu'à -0.95   $T \approx 2$ K. Insert : spectres bruts (les courbes en pointillés $-\cdot-\cdot-$ et $-\cdot-\cdot-$ correspondent respectivement aux séries 19 et 10 réalisées hors écoulement dans les mêmes conditions que les séries 20 et 9).   droite : spectres compensés par $k^{-5/3}$.

5.3.2 Simulations numériques

On peut utiliser les champs des simulations numériques décrites dans la section 3.5.1, basées sur une simulation directe d'une équation de Navier-Stokes pour la composante normale et d'une équation d'Euler pour la composante superfluide, couplées par la force de friction mutuelle. Elles permettent d'obtenir les champs simulés de vorticité de la composante normale et superfluide à chaque température.

On peut alors calculer le spectre 3D de la valeur absolue de la vorticité, $|\vec{\omega}|$ (figure 5.6-à) ou bien le spectre 1D, le long d'une ligne, de la projection orthogonale à la ligne considérée, $|\vec{\omega}_\perp|$ (figures 5.6-à et  ). Le deuxième type de spectre est plus proche des spectres expérimentaux. Les spectres simulés (3D) reproduisent qualitativement le résultat expérimental : pente proche de $-5/3$ à basse température, et aplatissement lorsque la température augmente. L'évolution de la pente est beaucoup moins marquée pour les spectres 1D : ces derniers présentent une pente moins forte que $-5/3$ même à très basse température. Il est possible que cela provienne du nombre de Reynolds qui n'est pas assez élevé (il varie de 980 à 2280 selon les acquisitions, voir table 3.3).

La figure 5.6-à permet de comparer les spectres de vorticité de la composante normale et de la composante superfluide. Pour ce qui concerne la composante normale, il n'y a pas de changement de pente significatif avec la température, seulement l'échelle de coupure qui devient plus petite, comme on s'y attend par effet de nombre de Reynolds. L'énergie de la composante superfluide est plus d'une décade plus grande que celle de la composante normale à basse température. Elles deviennent comparables à haute température. Cela est cohérent avec l'idée que les deux fluides sont verrouillés à haute température et que le glissement à basse température produit le champ de vorticité L_\times , ce qui augmente l'énergie du spectre de vorticité de la composante superfluide et conduit à un raidissement de la pente.

Les figures 5.6-à et à permettent de comparer les pentes du spectre de vorticité superfluide, en 3D ou en 1D. Dans les deux cas, on voit que la pente est plus importante lorsque la température est basse. Ce résultat est cohérent avec les mesures expérimentales. Il est plus marqué sur le spectre 3D : la pente effective varie de $-0,95$   $-0,45$ sur le spectre 1D et de $-5/3$   presque un plateau sur le spectre 3D.

5.3.3 Conclusion

Nous avons donc montré, à la fois expérimentalement à l'aide d'une pince à second son placée dans une soufflerie, et numériquement à partir des champs de vorticité simulés, que le spectre de vorticité superfluide évolue selon la température : la pente est d'autant plus forte que la température est basse. Dans la limite haute température, on retrouve un résultat compatible avec un fluide Navier-Stokes.

Ce résultat est interprété par l'existence de deux champs de vorticité superposés : un champ polarisé L_\parallel qui traduit la vorticité à grande échelle et un champ thermalisé L_\times associé aux échelles d'équipartition, d'autant plus intense que la température est basse. La loi d'échelle observée a été interprétée comme un comportement de type « scalaire passif ». Lorsque L_\times domine, le spectre obtenu est dominé par les inhomogénéités de l'enstrophie méso-échelle. Il semble tendre vers $f^{-5/3}$ si le nombre de Reynolds est suffisamment grand.

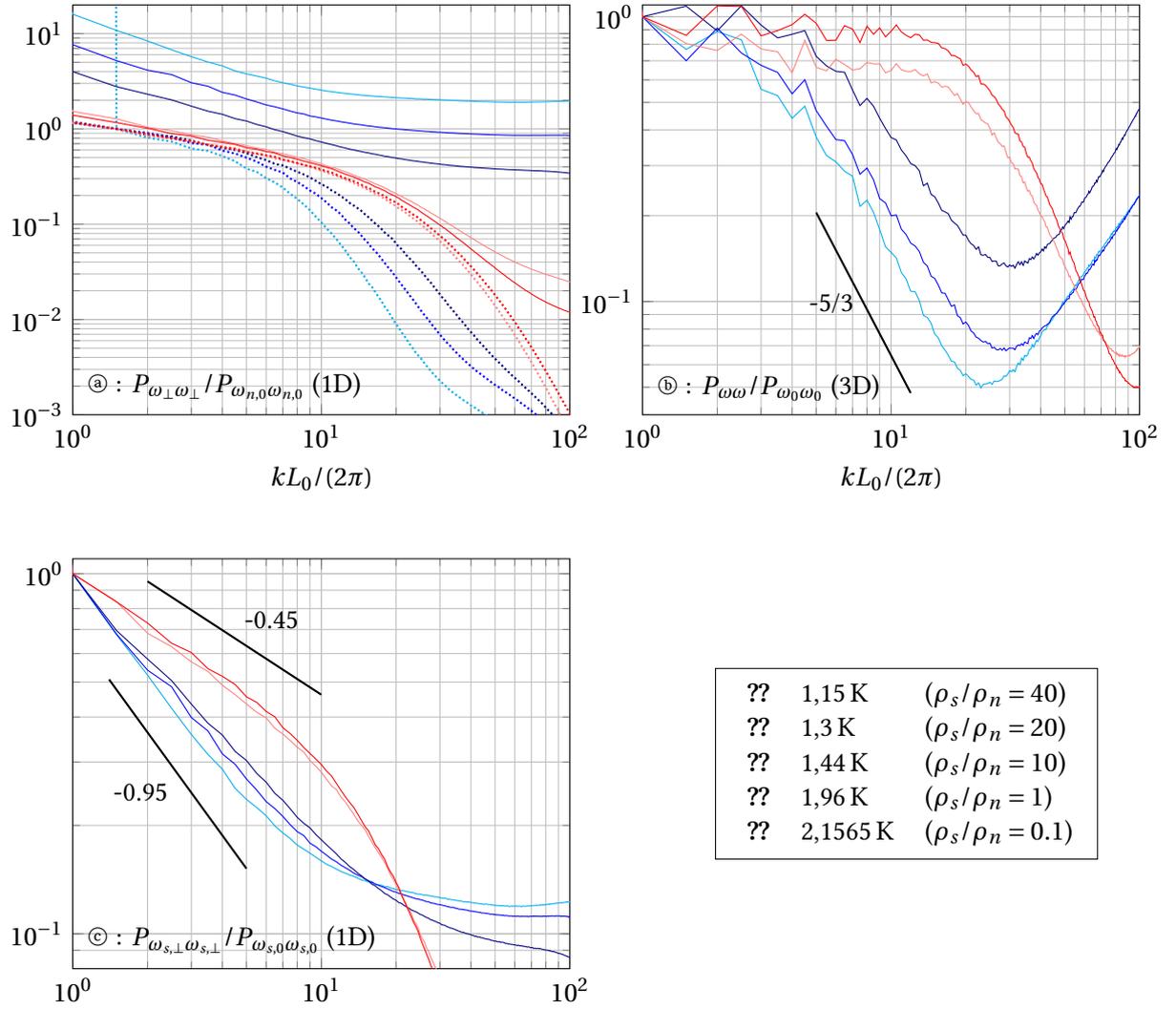


Fig 5.6 – Spectres de vorticité simulés. (a) Spectres 1D de la vorticité de la composante superfluide (lignes continues) et de la composante normale (lignes pointillées), normalisés par la valeur basse fréquence du spectre de la composante normale. (b) Spectres 3D de la vorticité de la composante superfluide. (c) Spectres 1D de la vorticité de la composante superfluide, normalisés par leur valeur basse fréquence.

Conclusion

La question initiale posée dans cette thèse est de savoir comment la turbulence superfluide se compare à la turbulence classique. Pour y répondre, nous avons suivi la voie expérimentale ouverte par Maurer & Tabeling en 1998, basée sur des mesures de fluctuations locales résolues en temps et en espace.

Le faisceau d'observations présenté dans cette thèse permet d'asseoir une analogie forte, *aux échelles inertielles les plus grandes*, entre les fluctuations de vitesse locale dans l'hélium superfluide et celles observées en turbulence classique. Ce résultat repose à la fois sur des mesures expérimentales menées dans des souffleries cryogéniques à l'aide de tubes de Pitot miniatures, et sur des simulations numériques, notamment celles du modèle continu à deux fluides, réalisées en collaboration avec Emmanuel Lévêque : spectre en $k^{-5/3}$, constante de Kolmogorov, taux de turbulence, taux de dissipation d'énergie et cascade d'énergie (loi des 4/5). Physiquement, les composantes normale et superfluide sont verrouillées et l'énergie cascade à travers les échelles de façon comparable à la turbulence classique. Les simulations numériques montrent comment le couplage entre les composantes normale et superfluide permet à l'énergie du superfluide d'être dissipée par la viscosité de la composante normale.

Cependant, la question de la distribution de la vitesse $p(v)$ fait encore l'objet de débats. En effet, nos mesures et nos simulations numériques conduisent à un histogramme des vitesses gaussien (figures 4.1 page 70). Elles semblent en contradiction avec des mesures récentes basées sur l'analyse de trajectoires de particules d'hydrogène solide [Pao08] ainsi qu'avec des simulations numériques des vortex quantiques dans la limite de température nulle (avec une loi de Biot & Savart) [BB11] qui conduisent à un histogramme des vitesses en loi de puissance. C'est probablement l'échelle à laquelle est réalisée la mesure, ainsi que l'existence d'une turbulence développée, qui expliquent la différence entre ces résultats : dans notre cas, le capteur est grand devant la distance inter-vortex et le modèle numérique lisse par construction les détails des tourbillons quantiques individuels. La statistique de vitesse provient d'une mesure à *grande échelle*. Elle est lisse et gaussienne. En revanche, dans les autres cas, les vortex individuels sont détectés ou simulés. C'est une mesure à *petite échelle*. Compte tenu du faible nombre de Reynolds, le théorème de la limite centrale s'applique « mal » : la statistique converge lentement et reste non gaussienne.

La similarité entre turbulence superfluide et turbulence classique s'arrête lorsque l'on considère le spectre de fluctuations de vorticité. La mesure de 2007 a mis en évidence un spectre en $k^{-5/3}$ aux échelles inertielles [Roc07] et nous avons montré expérimentalement, dans le cadre de cette thèse, que la pente de ce spectre évolue avec la température. Cette propriété n'a pas d'analogie classique, elle est spécifique à la turbulence superfluide. Il s'agit d'un résultat à *grande échelle* puisqu'elle est effectuée à l'aide d'un capteur bien plus grand que la distance inter-vortex et qu'elle s'établit dans les échelles inertielles. Cependant, l'interprétation que nous en proposons repose sur une phénoménologie à *petite échelle*.

Cette physique *aux petites échelles* constitue encore un problème ouvert. Lorsque la température est suffisamment basse, nos simulations suggèrent une augmentation du glissement des composantes normale et superfluide à petite échelle, associée à une accumulation d'énergie et   un spectre simulé (3D) de la vitesse qui tend asymptotiquement vers une loi d'échelle en k^2 , de type «  quipartition ». C'est ce réservoir d'excitations à petite échelle qui pourrait expliquer le raidissement de la pente du spectre de vorticité lorsque la température diminue. Un défi majeur pour les expériences futures consisterait à mettre en évidence expérimentalement la remontée spectrale en k^2 à petite échelle sur le signal de vitesse.

Conclusion

Plus généralement, cette remontée rappelle celle qui est observée en turbulence classique dans les modèles de type « Euler tronqué » [KC89 ; Cic05 ; BB06], ce qui rapproche la turbulence de l'hélium superfluide de celle d'un fluide classique sans viscosité. Des études complémentaires restent néanmoins nécessaires pour savoir jusqu'où cette analogie peut être poussée. Ce type d'analogie illustre que l'hélium superfluide est un fluide modèle utile dans le cadre plus général de l'étude de la turbulence.

Pour mettre en évidence expérimentalement ces analogies entre la turbulence superfluide et la turbulence classique, il a fallu mettre au point une instrumentation adaptée. Ces développements ouvrent des perspectives au delà du cadre de la turbulence superfluide.

En plus des perspectives d'adaptation des tubes de Pitot miniatures à d'autres contextes dans lesquels un capteur local robuste peut s'avérer souhaitable, les développements en collaboration avec Alessandro Monfardini ont montré l'intérêt de la technique des micro-résonateurs supraconducteurs dans le contexte de l'hydrodynamique cryogénique.

En effet, cette technique de mesure s'est révélée très sensible et complète la palette des micro-capteurs mis en œuvre jusqu'à présent en hydrodynamique cryogénique, basée principalement sur des transducteurs de pression (fluctuations de pression dynamique,...) et sur la thermométrie (fluctuations de température, atténuation de second son, fils chauds,...). Dans le cadre de cette thèse, un micro-résonateur a été placé sur une micro-poutrelle mais on peut envisager d'autres applications.

On peut penser par exemple à l'étude de la couche limite dans une cellule de convection de Rayleigh-Bénard à très haut nombre de Rayleigh, et en particulier, au delà de la transition observée à Grenoble en 1997, à partir de laquelle l'efficacité du transfert thermique augmente [Cha97]. Le régime obtenu, baptisé *régime ultime de la convection*, a été interprété comme une transition vers le régime asymptotique prédit par Kraichnan en 1962. On pourrait envisager de déposer une matrice de micro-résonateurs sur le flasque inférieur afin d'obtenir une image résolue en temps et en espace des structures sur la couche limite. Cela permettrait de caractériser la nature de l'instabilité de couche limite associée au changement de régime du transfert thermique.

On peut penser également à des applications pour l'hydrodynamique en hélium diphasique. L'indice optique de l'hélium liquide est très proche de 1 donc la lumière n'est pas trop diffusée dans le brouillard, ce qui permet de sonder tout le volume avec les techniques optiques de visualisation [Rou09 ; Wol09]. Cette propriété permet ainsi de sonder d'une façon originale la turbulence de mélange, comme celle d'un jet coaxial [Lad00 ; Lad01]. Les micro-résonateurs supraconducteurs sont sensibles aux fluctuations locales de densité [Gra08]. On peut alors envisager de les utiliser pour réaliser des mesures locales résolues en temps du taux de gouttelettes dans le brouillard d'hélium liquide.

Ces nouvelles approches instrumentales continuent à être explorées également pour la turbulence superfluide. L'enjeu est de résoudre expérimentalement la physique à l'échelle de la coupure quantique, de l'ordre de la distance inter-vortex. Le défi est triple car il nécessite d'améliorer d'un ordre de grandeur la résolution des capteurs, les dimensions de l'écoulement et la fraction de superfluide.

Bibliographie

- [ABS88] R. ANTONIA, L. BROWNE et D. SHAH, « Characteristics of vorticity fluctuations in a turbulent wake », *J. Fluid Mech.* **189** 1988, p. 349–365, DOI : [10.1017/S0022112088001053](https://doi.org/10.1017/S0022112088001053).
- [AFT10] H. ADACHI, S. FUJIYAMA et M. TSUBOTA, « Steady-state counterflow quantum turbulence: simulation of vortex filaments using the full Biot-Savart law », *Phys. Rev. B* **81** 2010, p. 104511, DOI : [10.1103/PhysRevB.81.104511](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.81.104511).
- [AJ38] J. ALLEN et H. JONES, « New Phenomena Connected with Heat Flow in Helium II », *Nature* **141** 1938, p. 243–244, DOI : [10.1038/141243a0](https://doi.org/10.1038/141243a0).
- [AM38] J. ALLEN et A. MISENER, « Flow of Liquid Helium II », *Nature* **141** 1938, p. 75, DOI : [10.1038/141075a0](https://doi.org/10.1038/141075a0).
- [Bar05] S. BARTH, H. KOCH, A. KITTEL, J. PEINKE, J. BURGOLD et H. WURMUS, « Laser-cantilever anemometer: A new high-resolution sensor for air and liquid flows », *Rev. Sci. Instrum.* **76** 2005, p. 075110, DOI : [10.1063/1.1979467](https://doi.org/10.1063/1.1979467).
- [Bat51] G. BATCHELOR, « Pressure fluctuations in isotropic turbulence », *Proc. Camb. Phil. Soc.* **47** 1951, p. 359–374, DOI : [10.1017/S0305004100026712](https://doi.org/10.1017/S0305004100026712).
- [BB06] W. BOS et J.-P. BERTOGLIO, « Dynamics of spectrally truncated inviscid turbulence », *Phys. fluids* **18** 2006, p. 071701, DOI : [10.1063/1.2219766](https://doi.org/10.1063/1.2219766).
- [BB11] A. BAGGALEY et C. BARENGHI, « Vortex-density fluctuations in quantum turbulence », *Phys. Rev. B* **84** 2011, 020504(R), DOI : [10.1103/PhysRevB.84.020504](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.84.020504).
- [BD77] J. S. BROOKS et R. J. DONNELLY, « The calculated thermodynamic properties of superfluid helium-4 », *J. Phys. Chem. Ref. Data* **6** 1977, p. 51, DOI : [10.1063/1.555549](https://doi.org/10.1063/1.555549).
- [BD83] C. BARENGHI et R. DONNELLY, « Friction on Quantized Vortices in Helium II. A Review. », *J. Low Temp. Phys.* **52**(3/4) 1983, p. 189, DOI : [10.1007/BF00682247](https://doi.org/10.1007/BF00682247).
- [Ben93] R. BENZI, S. CILIBERTO, R. TRIPICCIONE, C. BAUDET, F. MASSAIOLI et S. SUCCI, « Extended self-similarity in turbulent flows », *Phys. Rev. E* **48**(1) 1993, R29–R32, DOI : [10.1103/PhysRevE.48.R29](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.48.R29).
- [Ben95] R. BENZI, S. CILIBERTO, C. BAUDET et G. RUIZ-CHAVARRIA, « On the scaling of three-dimensional homogeneous and isotropic turbulence », *Physica D* **80** 1995, p. 385–398, DOI : [10.1016/0167-2789\(94\)00190-2](https://doi.org/10.1016/0167-2789(94)00190-2).
- [Bew08] G. BEWLEY, M. PAOLETTI, K. SREENIVASAN et D. LATHROP, « Characterization of reconnecting vortices in superfluid helium », *PNAS* **105**(37) 2008, p. 13707–13710, DOI : [10.1073/pnas.0806002105](https://doi.org/10.1073/pnas.0806002105).
- [Blu11] D. B. BLUM, G. P. BEWLEY, E. BODENSCHATZ, M. GIBERT, A. GYLFASSON, L. MYDLARSKI, G. A. VOTH, H. XU et P. K. YEUNG, « Signatures of non-universal large scales in conditional structure functions from various turbulent flows », *New J. Phys.* **13** 2011, p. 113020, DOI : [10.1088/1367-2630/13/11/113020](https://doi.org/10.1088/1367-2630/13/11/113020).

- [Bra08] D. BRADLEY, S. FISHER, A. GUÉNAULT, R. HALEY, S. O’SULLIVAN, G. PICKETT et V. TSEPELIN, « Fluctuations and Correlations of Pure Quantum Turbulence in Superfluid ^3He – B », *Phys. Rev. Lett.* **101** 2008, p. 065302, DOI : [10.1103/PhysRevLett.101.065302](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.101.065302).
- [Bre84] F. BREIMESSER, L. INTICHAR, M. POPPINGER et C. SCHNAPPER, « KPY 12 - A pressure transducer suitable for low temperature use », *Journal de Physique* **45** 1984, p. C1–671.
- [BVW87] J.-L. BALINT, P. VUKOSLAVČEVIĆ et J. M. WALLACE, « A study of the vortical structure of the turbulent boundary layers », *Advances in Turbulence*, 1987, p. 456–464.
- [Cas94] B. CASTAING, B. CHABAUD, B. HÉBRAL, A. NAERT et J. PEINKE, « Turbulence at helium temperature: velocity measurements », *Physica B* **194-196** 1994, p. 697–698, DOI : [10.1016/0921-4526\(94\)90678-5](https://doi.org/10.1016/0921-4526(94)90678-5).
- [CBC66] G. COMTE-BELLOT et S. CORRSIN, « The use of a contraction to improve the isotropy of grid-generated turbulence », *J. Fluid Mech.* **25** 1966, p. 657–682, DOI : [10.1017/S0022112066000338](https://doi.org/10.1017/S0022112066000338).
- [CBC71] G. COMTE-BELLOT et S. CORRSIN, « Simple Eulerian time correlation of full- and narrow-band velocity signals in grid-generated ‘isotropic’ turbulence », *J. Fluid Mech.* **48** 1971, p. 273–337, DOI : [10.1017/S0022112071001599](https://doi.org/10.1017/S0022112071001599).
- [CBC95] G. R. CHAVARRIA, C. BAUDET et S. CILIBERTO, « Hierarchy of the Energy Dissipation Moments in Fully Developed Turbulence », *Phys. Rev. Lett.* **74**(11) 1995, p. 1986, DOI : [10.1103/PhysRevLett.74.1986](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.74.1986).
- [CGH90] B. CASTAING, Y. GAGNE et E. HOPFINGER, « Velocity probability density functions of high Reynolds number turbulence », *Physica D* **46** 1990, p. 177–200, DOI : [10.1016/0167-2789\(90\)90035-N](https://doi.org/10.1016/0167-2789(90)90035-N).
- [CGS07] T. CHAGOVETS, A. GORDEEV et L. SKRBEK, « Effective kinematic viscosity of turbulence He II », *Phys. Rev. E* **76** 2007, p. 027301, DOI : [10.1103/PhysRevE.76.027301](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.76.027301).
- [Cha00] O. CHANAL, B. CHABAUD, B. CASTAING et B. HÉBRAL, « Intermittency in a turbulent low temperature gaseous helium jet », *Eur. Phys. J. B* **17** 2000, p. 309–317, DOI : [10.1007/s100510070146](https://doi.org/10.1007/s100510070146).
- [Cha62] C. CHASE, « Thermal Conduction in Liquid Helium II - part I », *Phys. Rev.* **127**(2) 1962, p. 361, DOI : [10.1103/PhysRev.127.361](https://doi.org/10.1103/PhysRev.127.361).
- [Cha94] B. CHABAUD, A. NAERT, J. PEINKE, F. CHILLÀ, B. CASTAING et B. HÉBRAL, « Transition toward Developed Turbulence », *Phys. Rev. Lett.* **73**(24) 1994, p. 3227, DOI : [10.1103/PhysRevLett.73.3227](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.73.3227).
- [Cha97] X. CHAVANNE, F. CHILLÀ, B. CASTAING, B. HÉBRAL, B. CHABAUD et J. CHAUSSY, « Observation of the ultimate regime in Rayleigh-Bénard convection », *Phys. Rev. Lett.* **79** 1997, p. 3648–3651, DOI : [10.1103/PhysRevLett.79.3648](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.79.3648).
- [Che06] L. CHEVILLARD, B. CASTAING, E. LÉVÊQUE et A. ARNEODO, « Unified multifractal description of velocity increments statistics in turbulence: Intermittency and skewness », *Physica D* **218** 2006, p. 77–82, DOI : [10.1016/j.physd.2006.04.011](https://doi.org/10.1016/j.physd.2006.04.011).
- [Cic05] C. CICHOWLAS, P. BONAÏTI, F. DEBBASCH et M. BRACHET, « Effective Dissipation and Turbulence in Spectrally Truncated Euler Flows », *Phys. Rev. Lett.* **95** 2005, p. 264502, DOI : [10.1103/PhysRevLett.95.264502](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.95.264502).
- [DB98] R. DONNELLY et C. BARENGHI, « The Observed Properties of Liquid Helium at the Saturated Vapor Pressure », *J. Phys. Chem. Ref. Data* **27** 1998, p. 1217, DOI : [10.1063/1.556028](https://doi.org/10.1063/1.556028).

- [DM39] J. DAUNT et K. MENDELSSOHN, « The transfer effect in liquid He II. I. The transfer phenomena », *Proc. R. Soc. Lond. A* **170**(942) 1939, p. 423–439, DOI : [10.1098/rspa.1939.0040](https://doi.org/10.1098/rspa.1939.0040).
- [Doy08] S. DOYLE, P. MAUSKOPF, J. NAYLON, A. PORSCH et C. DUNCOMBE, « Lumped Element Kinetic Inductance Detectors », *J. Low Temp. Phys.* **151** 2008, p. 530–536, DOI : [10.1007/s10909-007-9685-2](https://doi.org/10.1007/s10909-007-9685-2).
- [Dur11a] D. DURI, P. DIRIBARNE, P. CHARVIN, J. VIRONE, B. ROUSSET, J.-M. PONCET et C. BAUDET, « Liquid helium inertial jet for comparative study of classical and quantum turbulence », *Rev. Sci. Instrum.* **82** 2011, p. 115109, DOI : [10.1063/1.3661127](https://doi.org/10.1063/1.3661127).
- [Dur11b] D. DURI, J. SALORT, P. DIRIBARNE, P.-E. ROCHE et C. BAUDET, « Vorticity scattering measurements in a superfluid inertial round jet », *J. Phys.: Conf. Ser.* **318** 2011, p. 092027, DOI : [10.1088/1742-6596/318/9/092027](https://doi.org/10.1088/1742-6596/318/9/092027).
- [FB86] R. L. C. FLEMMER et C. L. BANKS, « On the Drag Coefficient of a Sphere », *Powder Technology* **48** 1986, p. 217–221.
- [FBS01] S. FUZIER, B. BAUDOY et S. V. SCIVER, « Steady-state pressure drop and heat transfer in He II forced flow at high Reynolds number », *Cryogenics* **41** 2001, p. 453–458, DOI : [10.1016/S0011-2275\(01\)00090-X](https://doi.org/10.1016/S0011-2275(01)00090-X).
- [Fey58] R. FEYNMAN, « Excitations in liquid helium », *Physica* **24** 1958, S18–S26, DOI : [10.1016/S0031-8914\(58\)80495-4](https://doi.org/10.1016/S0031-8914(58)80495-4).
- [GC74] M. GAD-EL-HAK et S. CORRSIN, « Measurements of the nearly isotropic turbulence behind a uniform jet grid », *J. Fluid Mech.* **62** 1974, p. 115–143, DOI : [10.1017/S0022112074000607](https://doi.org/10.1017/S0022112074000607).
- [GM49] C. GORTER et J. MELLINK, « On the irreversible processes in liquid helium II », *Physica* **15** 1949, p. 285–304, DOI : [10.1016/0031-8914\(49\)90105-6](https://doi.org/10.1016/0031-8914(49)90105-6).
- [Gra08] G. GRABOVSKIJ, L. SWENSON, O. BUISSON, C. HOFFMANN, A. MONFARDINI et J.-C. VILLÉGIÉ, « In situ measurement of the permittivity of helium using microwave NbN resonators », *Applied Physics Letters* **93** 2008, p. 134102, DOI : [10.1063/1.2996263](https://doi.org/10.1063/1.2996263).
- [GS63] C. GIBSON et W. SCHWARZ, « The universal equilibrium spectra of turbulent velocity and scalar fields », *J. Fluid Mech.* **16** 1963, p. 365–384, DOI : [10.1017/S0022112063000835](https://doi.org/10.1017/S0022112063000835).
- [HKN98] T. HARUYAMA, N. KIMURA et T. NAKAMOTO, « FPS51B - A small Piezo-Resistive Silicon Pressure Sensor for Use in Superfluid Helium », *17th International Cryogenic Engineering Conference, ICEC17*, 1998.
- [HS92] D. S. HOLMES et S. V. SCIVER, « Attenuation of Second Sound in Bulk Flowing He II », *J. Low Temp. Phys.* **87**(1-2) 1992, p. 73–93, DOI : [10.1007/BF00141568](https://doi.org/10.1007/BF00141568).
- [HV56] H. E. HALL et W. F. VINEN, « The rotation of liquid helium II - part I », *Proc. R. Soc. Lond. A* **238** 1956, p. 204–214, DOI : [10.1098/rspa.1956.0214](https://doi.org/10.1098/rspa.1956.0214).
- [IGK09] T. ISHIHARA, T. GOTOH et Y. KANEDA, « Study of High-Reynolds Number Isotropic Turbulence by Direct Numerical Simulation », *Annu. Rev. Fluid Mech.* **41** 2009, p. 165–180, DOI : [10.1146/annurev.fluid.010908.165203](https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.010908.165203).
- [KA93] J. KIM et R. ANTONIA, « Isotropy of the small scales of turbulence at low Reynolds number », *J. Fluid Mech.* **251** 1993, p. 219–238, DOI : [10.1017/S0022112093003398](https://doi.org/10.1017/S0022112093003398).
- [Kah98] H. KAHALERAS, Y. MALÉCOT, Y. GAGNE et B. CASTAING, « Intermittency and Reynolds number », *Phys. fluids* **10**(4) 1998, p. 910, DOI : [10.1063/1.869613](https://doi.org/10.1063/1.869613).
- [Kap38] P. KAPITZA, « Viscosity of liquid helium below the λ -point », *Nature* **141** 1938, p. 74.

- [KC89] R. KRAICHNAN et S. CHEN, « Is there a statistical mechanics of turbulence », *Physica D* **37** 1989, p. 160–172, DOI : [10.1016/0167-2789\(89\)90126-7](https://doi.org/10.1016/0167-2789(89)90126-7).
- [Kiv02] D. KIVOTIDES, C. VASSILICOS, D. SAMUELS et C. BARENGHI, « Velocity spectra of superfluid turbulence », *EPL* **57**(6) 2002, p. 845–851, DOI : [10.1209/epl/i2002-00588-3](https://doi.org/10.1209/epl/i2002-00588-3).
- [KK35] W. KEESOM et A. KEESOM, « New measurements on the specific heat of liquid helium », *Physica* **2**(1-12) 1935, p. 557–572, DOI : [10.1016/S0031-8914\(35\)90128-8](https://doi.org/10.1016/S0031-8914(35)90128-8).
- [Kol41] A. N. KOLMOGOROV, « The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers », *C. R. Acad. Sci. USSR* 1941.
- [Lad00] Y. LADAM, « Atomisation et évaporation dans un jet mixte hélium liquide/hélium gazeux », thèse de doct., Université Joseph Fourier, 2000.
- [Lad01] Y. LADAM, P.-E. WOLF, P. THIBAUT et L. PUECH, « Light scattering by a liquid-gas helium spray », *Eur. Phys. J. AP* **14** 2001, p. 137–141.
- [Lan41] L. LANDAU, « Theory of the Superfluidity of Helium II », *Phys. Rev.* **60** 1941, p. 356–358, DOI : [10.1103/PhysRev.60.356](https://doi.org/10.1103/PhysRev.60.356).
- [Lea01] M. LEADBEATER, T. WINIECKI, D. SAMUELS, C. BARENGHI et C. ADAMS, « Sound Emission due to Superfluid Vortex Reconnections », *Phys. Rev. Lett.* **86**(8) 2001, p. 1410, DOI : [10.1103/PhysRevLett.86.1410](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.86.1410).
- [Lie66] J. H. LIENHARD, « Synopsis of lift, drag, and vortex frequency data for rigid circular cylinders », *Research Division Bulletin, Washington State University* **300** 1966.
- [Lon38] F. LONDON, « The λ -Phenomenon of Liquid Helium and the Bose-Einstein Degeneracy », *Nature* **141** 1938, p. 643–644, DOI : [10.1038/141643a0](https://doi.org/10.1038/141643a0).
- [Mae04] M. MAEDA, A. SATO, M. YUYAMA, M. KOSUGE, F. MATSUMOTO et H. NAGAI, « Characteristics of a silicon pressure sensor in superfluid helium pressurized up to 1.5 MPa », *Cryogenics* **44** 2004, p. 217–222, DOI : [10.1016/j.cryogenics.2003.12.003](https://doi.org/10.1016/j.cryogenics.2003.12.003).
- [MB98] D. J. MELOTTE et C. F. BARENGHI, « Transition to Normal Fluid Turbulence in Helium II », *Phys. Rev. Lett.* **80**(19) 1998, p. 4181, DOI : [10.1103/PhysRevLett.80.4181](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.4181).
- [ML90] M. S. MOHAMED et J. C. LARUE, « The decay power law in grid-generated turbulence », *J. Fluid Mech.* **219** 1990, p. 195–214, DOI : [10.1017/S0022112090002919](https://doi.org/10.1017/S0022112090002919).
- [Mon10] A. MONFARDINI, L. SWENSON, A. BIDEAUD, F. DÉSERT, S. YATES, A. BENOIT, A. BARYSHEV, J. BASELMANS, S. DOYLE, B. KLEIN, M. ROESCH, C. TUCKER, P. ADE, M. CALVO, P. CAMUS, C. GIORDANO, R. GUESTEN, C. HOFFMANN, S. LECLERCQ, P. MAUSKOPF et K. SCHUSTER, « NIKA: A millimeter-wave kinetic inductance camera », *Astronomy and Astrophysics* **521** 2010, A29, DOI : [10.1051/0004-6361/201014727](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201014727).
- [MPS85] P. MATHIEU, B. PLAÇAIS et Y. SIMON, « Existe-t-il un troisième coefficient de friction mutuelle B' ? », *J. Physique Lett.* **46** 1985, p. 233–240, DOI : [10.1051/jphyslet:01985004606023300](https://doi.org/10.1051/jphyslet:01985004606023300).
- [MS82] P. MATHIEU et Y. SIMON, « Frequency dependence of mutual friction in rotating He II », *Phys. Rev. B* **26**(3) 1982, p. 1233, DOI : [10.1103/PhysRevB.26.1233](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.26.1233).
- [MT98] J. MAURER et P. TABELING, « Local investigation of superfluid turbulence », *EPL* **43**(1) 1998, p. 29–34, DOI : [10.1209/epl/i1998-00314-9](https://doi.org/10.1209/epl/i1998-00314-9).
- [MTW99] F. MOISY, P. TABELING et H. WILLAIME, « Kolmogorov Equation in a Fully Developed Turbulence Experiment », *Phys. Rev. Lett.* **82**(20) 1999, p. 3994, DOI : [10.1103/PhysRevLett.82.3994](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.82.3994).

- [NAB97] C. NORE, M. ABID et M. BRACHET, « Decaying Kolmogorov turbulence in a model of superflow », *Phys. fluids* **9** 1997, p. 2644, DOI : [10.1063/1.869473](https://doi.org/10.1063/1.869473).
- [NSD05] J. NIEMELA, K. SREENIVASAN et R. DONNELLY, « Grid Generated Turbulence in Helium II », *J. Low Temp. Phys.* **138**(3/4) 2005, p. 537, DOI : [10.1007/s10909-005-2253-8](https://doi.org/10.1007/s10909-005-2253-8).
- [Onn22] K. H. ONNES, « On the lowest Temperature Yet Obtained », *Comm. Phys. Lab. Univ. Leiden* **159** 1922.
- [Ons49] L. ONSAGER, « Statistical Hydrodynamics », *Supplemento al Volume VI, Serie IX del Nuovo Cimento* **6**(2) 1949, p. 279.
- [Pao08] M. PAOLETTI, M. E. FISHER, K. SREENIVASAN et D. LATHROP, « Velocity Statistics Distinguish Quantum Turbulence from Classical Turbulence », *Phys. Rev. Lett.* **101** 2008, p. 154501, DOI : [10.1103/PhysRevLett.101.154501](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.101.154501).
- [Pie03] S. PIETROPINTO, C. POULAIN, C. BAUDET, B. CASTAING, B. CHABAUD, Y. GAGNE, B. HÉBRAL, Y. LADAM, P. LEBRUN, O. PIROTTE et P. ROCHE, « Superconducting instrumentation for high Reynolds turbulence experiments with low temperature gaseous helium », *Physica C* **386** 2003, p. 512–516, DOI : [10.1016/S0921-4534\(02\)02115-9](https://doi.org/10.1016/S0921-4534(02)02115-9).
- [PL94] J.-F. PINTON et R. LABBÉ, « Correction to the Taylor hypothesis in swirling flows », *J. Phys. II* **4** 1994, p. 1461–1468, DOI : [10.1051/jp2:1994211](https://doi.org/10.1051/jp2:1994211).
- [RB08] P.-E. ROCHE et C. BARENGHI, « Vortex spectrum in superfluid turbulence: Interpretation of a recent experiment », *EPL* **81** 2008, p. 36002, DOI : [10.1209/0295-5075/81/36002](https://doi.org/10.1209/0295-5075/81/36002).
- [RBL09] P.-E. ROCHE, C. BARENGHI et E. LÉVÊQUE, « Quantum turbulence at finite temperature: The two-fluids cascade », *EPL* **87**(5) 2009, p. 54006, DOI : [10.1209/0295-5075/87/54006](https://doi.org/10.1209/0295-5075/87/54006).
- [Roc07] P.-E. ROCHE, P. DIRIBARNE, T. DIDELOT, O. FRANÇAIS, L. ROUSSEAU et H. WILLAIME, « Vortex density spectrum of quantum turbulence », *EPL* **77** 2007, p. 66002, DOI : [10.1209/0295-5075/77/66002](https://doi.org/10.1209/0295-5075/77/66002).
- [Rou08] B. ROUSSET, C. BAUDET, M. B. MARDION, B. CASTAING, D. COMMUNAL, F. DAVIAUD, P. DIRIBARNE, B. DUBRULLE, A. FORGEAS, Y. GAGNE, A. GIRARD, B. HÉBRAL, P.-E. ROCHE, P. ROUSSEL et P. THIBAUT, « TSF experiment for comparison of high Reynolds number turbulence in both He I and He II: First results », *Advances in cryogenic engineering, CEC ICMC*, t. 53, AIP Conference Proceedings, Chattanooga France, 2008, p. 633, URL : <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00430199/en/>.
- [Rou09] B. ROUSSET, D. CHATAIN, L. PUECH, P. THIBAUT, F. VIARGUES et P.-É. WOLF, « Visualization in cryogenic environment: Application to two-phase studies », *Cryogenics* **49** 2009, p. 554–564, DOI : [10.1016/j.cryogenics.2008.10.012](https://doi.org/10.1016/j.cryogenics.2008.10.012).
- [Rou94] B. ROUSSET, G. CLAUDET, A. GAUTHIER, P. SEYFERT, A. MARTINEZ, P. LEBRUN, M. MARQUET et R. V. WEELDEREN, « Pressure drop and transient heat transport in forced flow single phase helium II at high Reynolds numbers », *Fifteenth International Cryogenic Engineering Conference*, t. 34, Supplement 1, 1994, p. 317–320, DOI : [10.1016/S0011-2275\(05\)80070-0](https://doi.org/10.1016/S0011-2275(05)80070-0).
- [RS39] B. ROLLIN et F. SIMON, « On the “Film” phenomenon of liquid Helium II », *Physica* **6**(2) 1939, p. 219, DOI : [10.1016/S0031-8914\(39\)80013-1](https://doi.org/10.1016/S0031-8914(39)80013-1).
- [Sal10] J. SALORT, P. DIRIBARNE, B. ROUSSET, Y. GAGNE, B. DUBRULLE, T. DIDELOT, B. CHABAUD, F. GAUTHIER, B. CASTAING et P.-E. ROCHE, « Turbulent velocity spectra in superfluid flows », *Phys. fluids* **22** 2010, p. 125102, DOI : [10.1063/1.3504375](https://doi.org/10.1063/1.3504375).

- [Sal12] J. SALORT, B. CHABAUD, E. LÉVÊQUE et P.-E. ROCHE, « Energy cascade and the four-fifths law in superfluide turbulence », *EPL* **97**(3) 2012, p. 34006, DOI : [10.1209/0295-5075/97/34006](https://doi.org/10.1209/0295-5075/97/34006).
- [SCP00] C. SIMAND, F. CHILLÀ et J.-F. PINTON, « Inhomogeneous turbulence in the vicinity of a large-scale coherent vortex », *EPL* **49**(3) 2000, p. 336–342, DOI : [10.1209/epl/i2000-00501-8](https://doi.org/10.1209/epl/i2000-00501-8).
- [SHS99] M. R. SMITH, D. K. HILTON et S. W. V. SCIVER, « Observed drag crisis on a sphere in flowing He I and He II », *Phys. fluids* **11** 1999, p. 751, DOI : [10.1063/1.869947](https://doi.org/10.1063/1.869947).
- [SL94] Z.-S. SHE et E. LEVEQUE, « Universal scaling laws in fully developed turbulence », *Phys. Rev. Lett.* **72**(3) 1994, p. 336, DOI : [10.1103/PhysRevLett.72.336](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.72.336).
- [SP78] U. SCHUMANN et G. PATTERSON, « Numerical study of pressure and velocity fluctuations in nearly isotropic turbulence », *J. Fluid Mech.* **88** 1978, p. 685–709, DOI : [10.1017/S0022112078002347](https://doi.org/10.1017/S0022112078002347).
- [Sre95] K. R. SREENIVASAN, « On the universality of the Kolmogorov constant », *Phys. fluids* **7**(11) 1995, p. 2778, DOI : [10.1063/1.868656](https://doi.org/10.1063/1.868656).
- [SRL11] J. SALORT, P.-E. ROCHE et E. LÉVÊQUE, « Mesoscale equipartition of kinetic energy in quantum turbulence », *EPL* **94** 2011, p. 24001, DOI : [10.1209/0295-5075/94/24001](https://doi.org/10.1209/0295-5075/94/24001).
- [SS09] D. SCHMORANZER et L. SKRBK, « Experimental setup for probing a von Karman type flow of normal and superfluid helium », *Quantum Fluids and Solids*, 2009.
- [SSD99] S. R. STALP, L. SKRBK et R. J. DONNELLY, « Decay of Grid Turbulence in a Finite Channel », *Phys. Rev. Lett.* **82**(24) 1999, p. 4831, DOI : [10.1103/PhysRevLett.82.4831](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.82.4831).
- [SSG74] J. SCHEDVIN, G. STEGEN et C. GIBSON, « Universal similarity at high grid Reynolds numbers », *J. Fluid Mech.* **65** 1974, p. 561–579, DOI : [10.1017/S0022112074001546](https://doi.org/10.1017/S0022112074001546).
- [Swa87] C. SWANSON, W. WAGNER, R. DONNELLY et C. BARENGHI, « Calculation of Frequency- and Velocity-Dependent Mutual Friction Parameters in Helium II », *J. Low Temp. Phys.* **66**(5/6) 1987, p. 263, DOI : [10.1007/BF00682257](https://doi.org/10.1007/BF00682257).
- [Tay38] G. TAYLOR, « The Spectrum of Turbulence », *Proc. R. Soc. Lond. A* **164** 1938, p. 476–490, DOI : [10.1098/rspa.1938.0032](https://doi.org/10.1098/rspa.1938.0032).
- [Tou66] J. TOUGH, « Classical and Quantum-Mechanical Turbulence in He II Heat Flow », *Phys. Rev.* **144**(1) 1966, p. 186, DOI : [10.1103/PhysRev.144.186](https://doi.org/10.1103/PhysRev.144.186).
- [Ube53] M. UBEROI, « Quadruple velocity correlations and pressure fluctuations in isotropic turbulence », *J. Aero. Sci* **20** 1953, p. 197–204.
- [Vin00] W. F. VINEN, « Turbulence in a Superfluid », *J. Low Temp. Phys.* **121**(5-6) 2000, p. 367, DOI : [10.1023/A:1017593428347](https://doi.org/10.1023/A:1017593428347).
- [Vin57a] W. F. VINEN, « Mutual friction in a heat current in liquid helium II - part I », *Proc. R. Soc. Lond. A* **240** 1957, p. 114–127, DOI : [10.1098/rspa.1957.0071](https://doi.org/10.1098/rspa.1957.0071).
- [Vin57b] W. F. VINEN, « Mutual friction in a heat current in liquid helium II - part II », *Proc. R. Soc. Lond. A* **240** 1957, p. 128–143, DOI : [10.1098/rspa.1957.0072](https://doi.org/10.1098/rspa.1957.0072).
- [Vin57c] W. F. VINEN, « Mutual friction in a heat current in liquid helium II - part III », *Proc. R. Soc. Lond. A* **242** 1957, p. 493–515, DOI : [10.1098/rspa.1957.0191](https://doi.org/10.1098/rspa.1957.0191).
- [Vin58] W. F. VINEN, « Mutual friction in a heat current in liquid helium II - part IV », *Proc. R. Soc. Lond. A* **243** 1958, p. 400–413, DOI : [10.1098/rspa.1958.0007](https://doi.org/10.1098/rspa.1958.0007).

- [Vin61] W. F. VINEN, « The detection of single quanta of circulation in liquid helium II », *Proc. R. Soc. Lond. A* **260** 1961, p. 218–236, DOI : [10.1098/rspa.1961.0029](https://doi.org/10.1098/rspa.1961.0029).
- [VN02] W. F. VINEN et J. J. NIEMELA, « Quantum Turbulence », *J. Low Temp. Phys.* **128**(5/6) 2002, p. 167–231, DOI : [10.1023/A:1019695418590](https://doi.org/10.1023/A:1019695418590).
- [Wal88a] P. L. WALSTROM, « Heat transfert by Internal Convection in Turbulent He II Forced Flow », *J. Low Temp. Phys.* **73**(5/6) 1988, p. 391, DOI : [10.1007/BF00683569](https://doi.org/10.1007/BF00683569).
- [Wal88b] P. L. WALSTROM, J. G. WEISEND-II, J. R. MADDOCKS et S. W. V. SCIVER, « Turbulent flow pressure drop in various He II transfer system components », *Cryogenics* **28** 1988, p. 101, DOI : [10.1016/0011-2275\(88\)90054-9](https://doi.org/10.1016/0011-2275(88)90054-9).
- [WG08] P. WALMSLEY et A. GOLOV, « Quantum and Quasiclassical Types of Superfluid Turbulence », *Phys. Rev. Lett.* **100** 2008, p. 245301, DOI : [10.1103/PhysRevLett.100.245301](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.100.245301).
- [WM87] P. L. WALSTROM et J. R. MADDOCKS, « Use of Siemens KPY pressure sensors at liquid helium temperatures », *Cryogenics* **27** 1987, p. 439–441, DOI : [10.1016/0011-2275\(87\)90161-5](https://doi.org/10.1016/0011-2275(87)90161-5).
- [Wol09] P.-E. WOLF, F. BONNET, L. GUYON, T. LAMBERT, S. PERRAUD, L. PUECH, B. ROUSSET et P. THIBAUT, « Probing helium interfaces with light scattering: From fluid mechanics to statistical physics », *Eur. Phys. J. E* **28** 2009, p. 183–198, DOI : [10.1140/epje/i2008-10417-1](https://doi.org/10.1140/epje/i2008-10417-1).
- [ZAC05] T. ZHOU, R. A. ANTONIA et L. P. CHUA, « Flow and Reynolds number dependencies of one-dimensional vorticity fluctuations », *J. of Turbulence* **6**(28) 2005.
- [Zoc94] G. ZOCCHI, P. TABELING, J. MAURER et H. WILLAIME, « Measurement of the scaling of the dissipation at high Reynolds numbers », *Phys. Rev. E* **50**(5) 1994, p. 3693, DOI : [10.1103/PhysRevE.50.3693](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.50.3693).
- [ZS05] T. ZHANG et S. W. V. SCIVER, « Large-scale turbulent flow around a cylinder in counterflow superfluid ^4He », *Nature Physics* **1** 2005, p. 36–38, DOI : [10.1038/nphys114](https://doi.org/10.1038/nphys114).

Annexe : pince à second son et contre-courant

1 Calcul de l'onde de température dans une cavité

Afin d'effectuer une mesure *locale* de la densité de lignes de vortex, on utilise une micro-cavité résonante de second son. Cette technique a été utilisée avec succès dans le passé. Elle a permis les premières mesures de fluctuations de densité de lignes de vortex dans un écoulement co-courant [Roc07].

On considère la cavité constituée d'un chauffage et d'un thermomètre en regard. Le chauffage est situé en $x = 0$, le thermomètre est situé en $x = D$ (voir figure 7). On considère une onde stationnaire de température dans laquelle on modélise la dissipation par un vecteur d'onde complexe, $\underline{k} = k - i\xi$,

$$T(x, t) = Ae^{-\xi x} e^{i(\omega t - kx)} + Be^{\xi x} e^{i(\omega t + kx)} \quad (10)$$

où A et B sont des constantes complexes déterminées par les conditions aux limites, ξ est un coefficient d'absorption par unité de longueur et $k = \omega/c_2$ si on néglige le décalage dû à l'absorption. On peut relier ξ au facteur de qualité du résonateur :

$$\xi = \frac{\omega}{2c_2 Q} \quad (11)$$

La présence de la paroi impose normalement un nœud de vitesse (et donc un ventre de température : la température et la vitesse sont conjuguées par l'équation 1.26) car le fluide ne pénètre pas dans la paroi. Cette condition est légèrement modifiée par la présence du forçage qui impose une vitesse non nulle au niveau du chauffage, ce qui conduit à déplacer le nœud de vitesse à une position $x = \epsilon D$ avec $\epsilon \ll 1$. Les amplitudes de température et de vitesse sont ainsi schématisées pour le mode fondamental sur la figure 7. Dans la pratique, le chauffage de puissance \mathcal{P} impose un flux thermique surfacique j qui est transporté seulement par la composante normale de l'hélium II d'entropie spécifique S (la composante superfluide ne transporte pas d'entropie),

$$j = \frac{\mathcal{P}}{A} = \rho S \bar{T} v_n \quad (12)$$

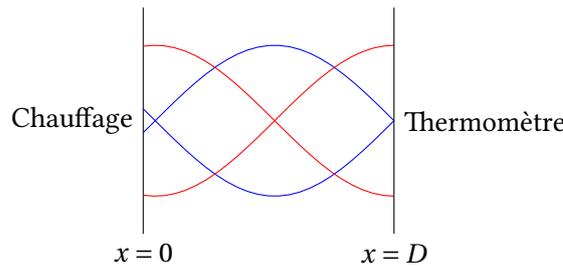


Fig 7 – Schéma du mode fondamental dans la cavité : enveloppe de température en rouge, enveloppe de v_s en bleu.

Par conséquent, un forçage sinusoïdal $j(t) = j_0 e^{2i\pi\nu t}$ impose une condition de vitesse en $x = 0$,

$$v_n(0, t) = \frac{j_0 e^{2i\pi\nu t}}{\rho S \bar{T}} \quad (13)$$

ou de façon équivalente pour v_s (flux de masse nul),

$$v_s(0, t) = -\frac{\rho_n j_0 e^{2i\pi\nu t}}{\rho_s \rho_s \bar{T}} \quad (14)$$

Et donc en utilisant la relation 1.26 qui relie la dérivée temporelle de v_s et la dérivée spatiale de T ,

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = -\frac{\rho_n j_0 2i\pi\nu e^{2i\pi\nu t}}{\rho_s \rho_s \bar{T}} \equiv -\tau_x e^{2i\pi\nu t} \quad (15)$$

On considère donc le système de conditions aux limites suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Forçage en } x=0 \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = -\tau_x e^{2i\pi\nu t} \\ \text{Ventre en } x=D \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=D} = 0 \end{array} \right. \quad (16)$$

Ces conditions conduisent à $\omega = 2\pi\nu$ et à un système d'équation pour les constantes $A, B \in \mathbb{C}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} -A + B = -\tau_x \\ -Ae^{-(\xi+ik)D} + Be^{(\xi+ik)D} = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{\tau_x e^{(\xi+ik)D}}{e^{(\xi+ik)D} - e^{-(\xi+ik)D}} \\ B = \frac{\tau_x e^{-(\xi+ik)D}}{e^{(\xi+ik)D} - e^{-(\xi+ik)D}} \end{array} \right. \quad (17)$$

L'onde de température s'écrit donc,

$$T(x, t) = \frac{\tau_x e^{2i\pi\nu t}}{2(\cos kD \sinh \xi D + i \sin kD \cosh \xi D)} \left(e^{-\xi(x-D)} e^{-ik(x-D)} + e^{\xi(x-D)} e^{ik(x-D)} \right) \quad (18)$$

Ce qui permet de calculer l'amplitude mesurée en $x = D$ par le thermomètre :

$$|\Delta T| = \frac{\tau_x}{\sqrt{\cos^2 kD \sinh^2 \xi D + \sin^2 kD \cosh^2 \xi D}} \quad (19)$$

Ces expressions analytiques sont représentées sur la figure 8.

Dans la suite, on considère la condition de résonance, c'est-à-dire la condition pour la fréquence d'excitation qui conduit à l'amplitude de température mesurée maximale,

$$k_n D = n\pi \quad \text{c'est-à-dire} \quad \nu_n = \frac{nc_2}{2D} \quad (20)$$

Alors, l'amplitude ΔT de l'oscillation de température mesurée par le thermomètre s'écrit,

$$\Delta T = |T(D, t)| = \frac{\tau_x}{\sinh(\xi D)} \quad (21)$$

Et par conséquent, on a,

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_0} = \frac{\sinh(\xi_0 D)}{\sinh(\xi_0 + \xi_{VLD}) D} \quad (22)$$

avec :

ΔT_0 la mesure pour $\xi = \xi_0$, où ξ_0 est la dissipation équivalente sans écoulement ;

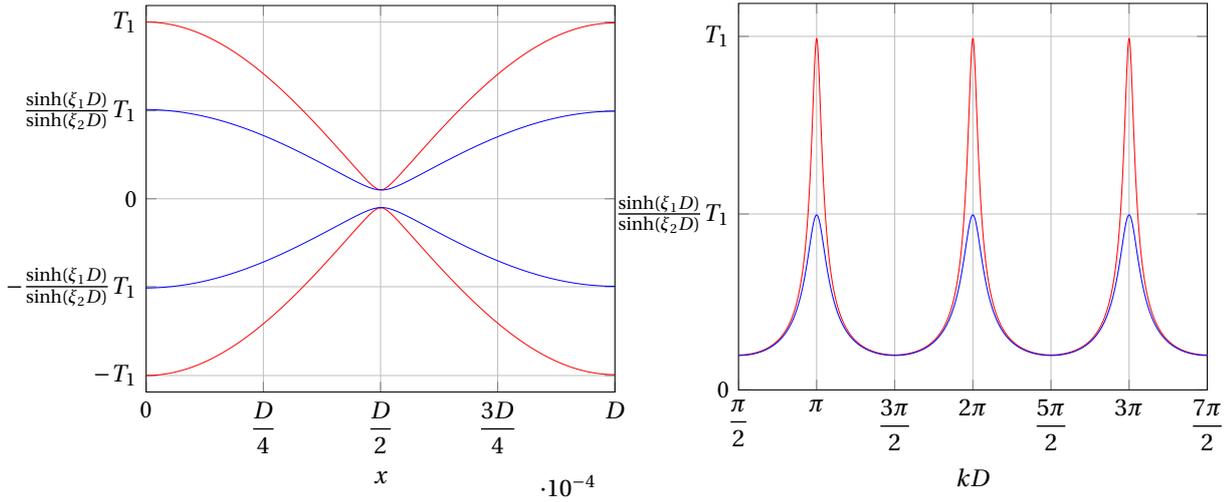


Fig 8 – Figure de gauche : représentation graphique de l'expression analytique 18 pour le mode fondamental ($kD = \pi$) avec $Q = 16$. Figure de droite : représentation graphique de l'expression analytique 19. En bleu : $\xi = \xi_1$. En rouge : $\xi = \xi_2 = 2\xi_1$. Les amplitudes obtenues pour $kD = n\pi$ sont dans un rapport $\sinh \xi_1 D / \sinh \xi_2 D$.

ΔT la mesure pour $\xi = \xi_0 + \xi_{\text{VLD}}$ où ξ_{VLD} est la dissipation due à l'interaction avec les vortex de l'écoulement.

On peut donc déduire l'atténuation ξ_{VLD} de l'onde de second son due à l'interaction avec les vortex de l'écoulement comme,

$$\xi_{\text{VLD}} = \frac{1}{D} \operatorname{asinh} \left(\frac{\Delta T_0}{\Delta T} \sinh(\xi_0 D) \right) - \xi_0 \quad (23)$$

ou encore, si on appelle $Q = \frac{\pi}{2\xi_0 D}$ le facteur de qualité du mode fondamental hors écoulement,

$$\xi_{\text{VLD}} = \frac{1}{D} \left(\operatorname{asinh} \left(\frac{\Delta T_0}{\Delta T} \sinh \left(\frac{\pi}{2Q} \right) \right) - \frac{\pi}{2Q} \right) \quad (24)$$

2 Caractérisation du dépôt thermométrique de l'IEF

Cette mesure de la réponse thermométrique du dépôt or-étain réalisé par l'IEF a été effectuée dans un cryostat en verre. La résistance est mesurée en 4 fils à l'aide d'une détection synchrone basse fréquence (TRMC). La température du bain (homogène en He II) est estimée avec la pression de vapeur saturante mesurée à l'aide d'une Jauge Keller 100 mbar. Comme on peut le voir sur la mesure de la figure 9, la sensibilité est relativement constante sur la plage de travail comprise entre 1,6 K et 2,0 K, de l'ordre de 1 k Ω /K.

3 Assemblage de la pince et technique de mesure

La pince est assemblée en plaçant le chauffage et le thermomètre en regard (voir figure 5.1). La distance entre le chauffage et le thermomètre est contrôlée à l'aide d'un espaceur. Les dimensions finales sont mesurées sous la loupe binoculaire : distance entre les plaques, $D = 290 \mu\text{m}$, dimensions des languettes $1500 \mu\text{m} \times 380 \mu\text{m}$. On peut en déduire une estimation pour la fréquence du mode fondamental ν_1 avec la relation 20. Quelques valeurs sont données table 1 pour différentes températures.

On peut comparer la fréquence de résonance estimée (voir table 1) et la fréquence réelle observée (voir figure 10). Elles sont du même ordre de grandeur. La différence provient probablement d'une erreur

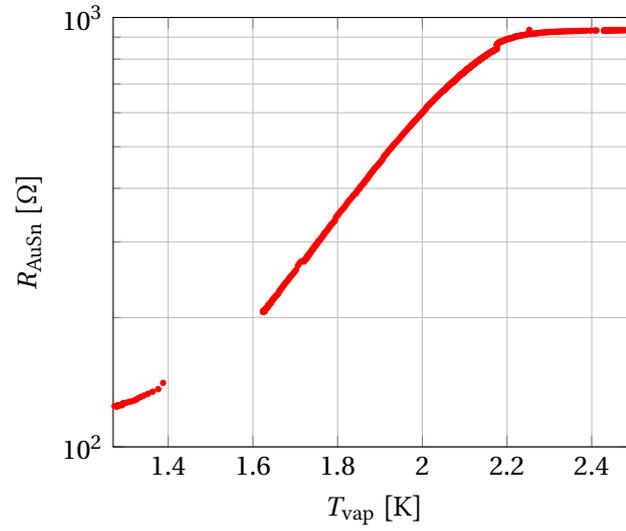


Fig 9 – Mesure de la dépendance en température du dépôt d’or-étain. Le « trou » entre 1,4K et 1,6K résulte d’une ouverture trop rapide de la vanne de laminage.

T [K]	ρ_s/ρ_n	c_2 [m/s]	ν_0 [kHz]
1,956	1	17,61	30,36
1,6	4,875	19,81	34,16

TABLE 1 – Quelques valeurs de la fréquence fondamentale ν_0 de l’onde de second son estimée avec l’équation 20.

d'estimation de la distance D entre le chauffage et le thermomètre. On voit nettement que l'amplitude mesurée est plus faible lorsqu'il y a un écoulement (et donc de la turbulence quantique) dans la conduite.

Pour calculer la densité moyenne de ligne de vortex avec l'équation 23, il faut estimer l'atténuation équivalente sans écoulement ξ_0 à partir de la mesure du facteur de qualité Q . Avec la mesure de la figure 10-c, on trouve les valeurs suivantes :

Fondamental	Premier harmonique
$\nu_1 = 42,76 \text{ kHz}$	$\nu_2 = 77,88 \text{ kHz}$
$\Delta\nu_1 = 5,6 \text{ kHz}$	$\Delta\nu_2 = 5,85 \text{ kHz}$
$Q_1 = 7,64$	$Q_2 = 13,31$
$\xi_0 = 929 \text{ m}^{-1}$	$\xi_0 = 970 \text{ m}^{-1}$
$\Delta T_0 = 9,5 \mu\text{V}$	$\Delta T_0 = 11,32 \mu\text{V}$
$\Delta T = 4,25 \mu\text{V}$	$\Delta T = 3,18 \mu\text{V}$
$\xi_{VLD} = 1077 \text{ m}^{-1}$	$\xi_{VLD} = 2167 \text{ m}^{-1}$

On constate qu'il y a une forte différence entre l'atténuation du fondamental et l'atténuation du premier harmonique. Pour mémoire, le facteur de qualité obtenu par le passé [Roc07] était plutôt de l'ordre de $Q = 20$ pour le pic fondamental et il n'y avait pas de différence sensible entre l'atténuation du fondamental et l'atténuation des harmoniques. La différence de facteur de qualité peut provenir de la taille de la pince : comme la pince qui nous intéresse ici est 2,6 fois moins large, il est probable qu'une partie plus importante de l'onde de second son soit diffractée par les bords. En effet, avec $c_2 = 18,95 \text{ m/s}$ et $\nu_0 = 42,76 \text{ kHz}$, la longueur d'onde $\lambda = c_2/\nu$ vaut $443 \mu\text{m}$, ce qui est exactement l'ordre de grandeur de la largeur des languettes de la pince.

On peut déduire les valeurs de Q et de ν_n en fonction de la température ou de la vitesse de second son, obtenues lors des différents refroidissements de la pince. Comme on peut le voir sur la figure 11, les valeurs de Q sont assez bruitées : on prend $Q \approx 8,5$. On trace également $nc_2/2\nu_n$ pour l'ensemble des acquisitions, on s'attend à une valeur indépendante de n et c_2 égale à la valeur de l'espacement, D . On voit que ce n'est pas tout à fait le cas, il y a une correction de l'ordre de 40 % pour les faibles valeurs de nc_2 : cela peut être dû à des effets dissipatifs (interface avec le silicium, bon conducteur thermique et facteur de qualité non infini) qui conduit à ce que le ventre ne soit pas exactement au niveau du thermomètre. Cet effet devient négligeable lorsque la longueur d'onde devient petite. Par conséquent, la valeur de D correspond au plateau obtenu dans la limite nc_2 grand : on prend $D = 270 \mu\text{m}$.

4 Écoulement de contre-courant

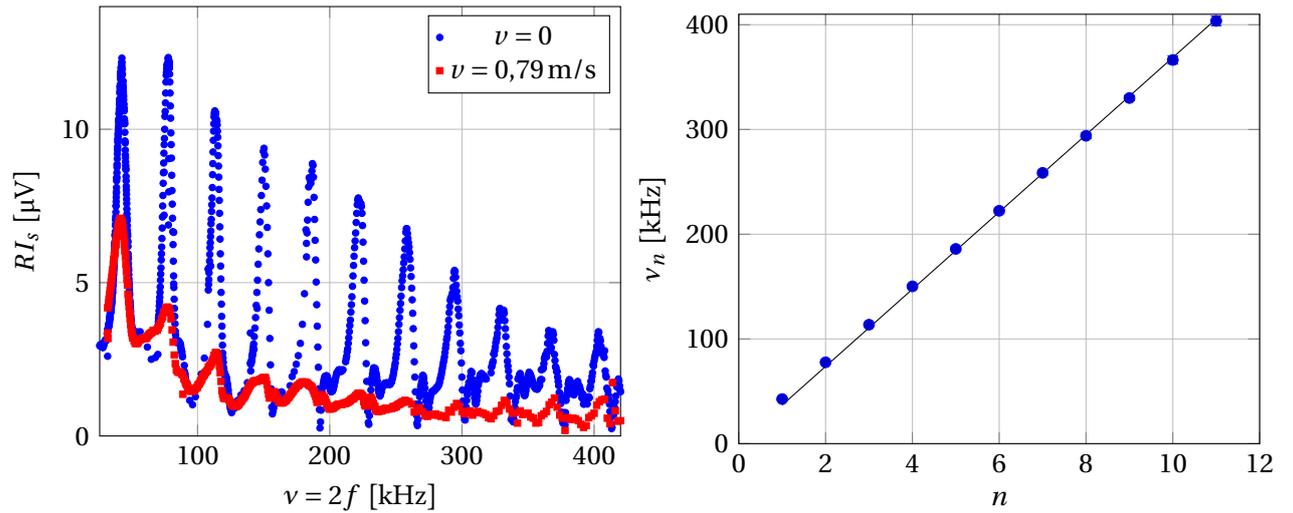
4.1 Motivation et ordre de grandeur

Dans cette partie, on s'intéresse à un écoulement de contre-courant. Il s'agit d'un écoulement dans lequel la direction moyenne de la vitesse normale \vec{v}_n est opposée à celle de la vitesse superfluide \vec{v}_s (voir section 1.3.3). En particulier, on aimerait savoir si un écoulement de contre-courant homogène et isotrope présente une hiérarchie d'échelles avec, par exemple, un mécanisme type Kolmogorov ou si le système est dominé par l'équipartition des excitations.

Pour répondre à cette question, réaliser une mesure de vitesse est délicat parce que le flux d'impulsion moyen est nul. En revanche, on peut utiliser une pince à second son et mesurer la densité de lignes de vortex générée par l'écoulement et analyser l'autocorrélation ou le spectre du signal.

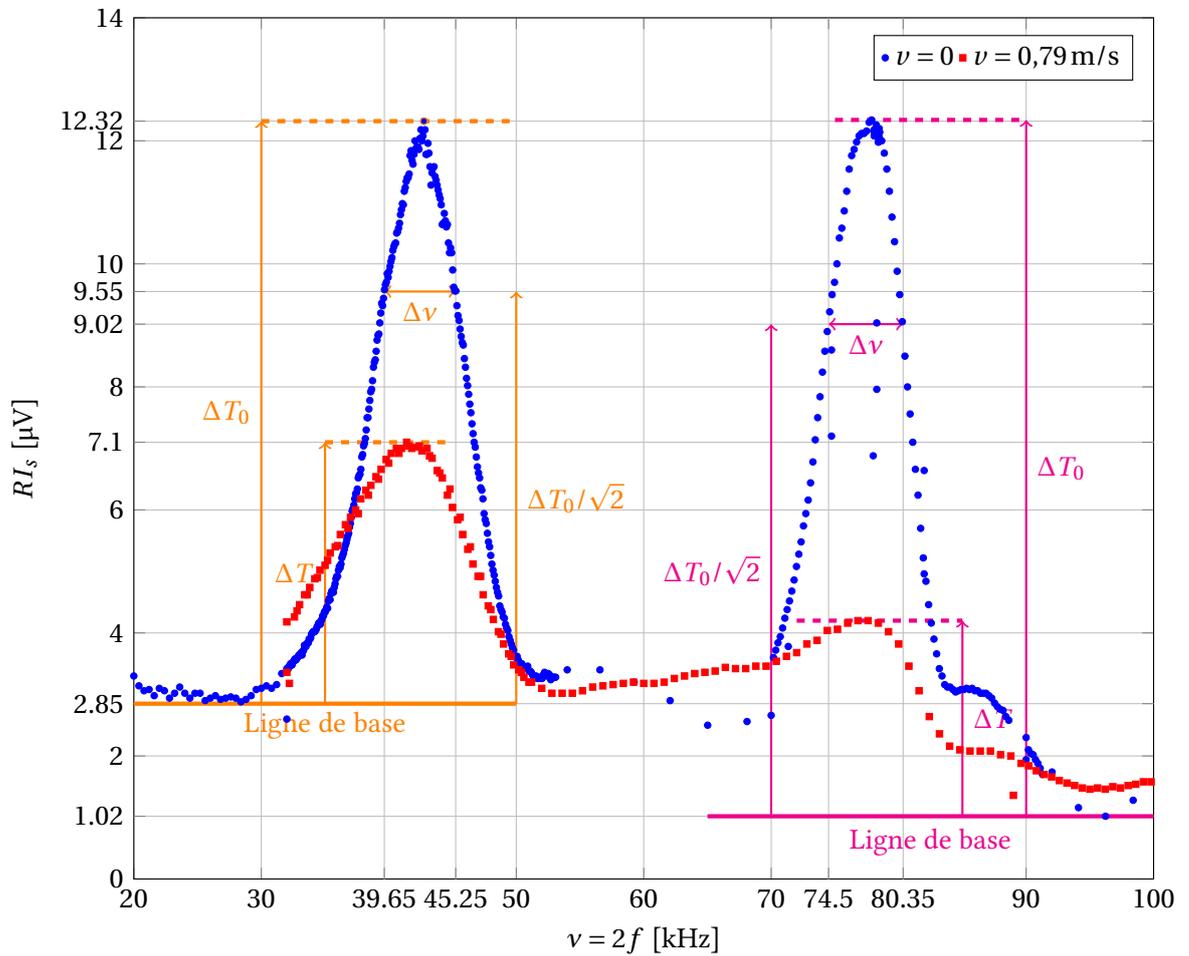
4.2 Expérience exploratoire

Les expériences présentées dans cette annexe sont exploratoires. Il s'agit de préparer de préparer d'éventuelles futures expériences dédiées et de tester s'il est possible d'obtenir un signal avec une pince à



(a) Amplitude de l'onde de second son avec et sans écoulement sur une large gamme de fréquence d'excitation ν

(b) Fréquence du n^{e} pic pour $n = 1 \dots 11$. La ligne continue est un ajustement pour $D = 257 \mu\text{m}$ de l'équation $\nu_n = \frac{nc}{2D}$.



(c) Détail des deux premiers harmoniques et définition des notations utilisées pour le calcul de ξ_0 et ξ_{VLD}

Fig 10 – Mesure de l'onde de second son obtenue avec l'électronique de la figure 5.3 pour $T = 1,72\text{K}$.

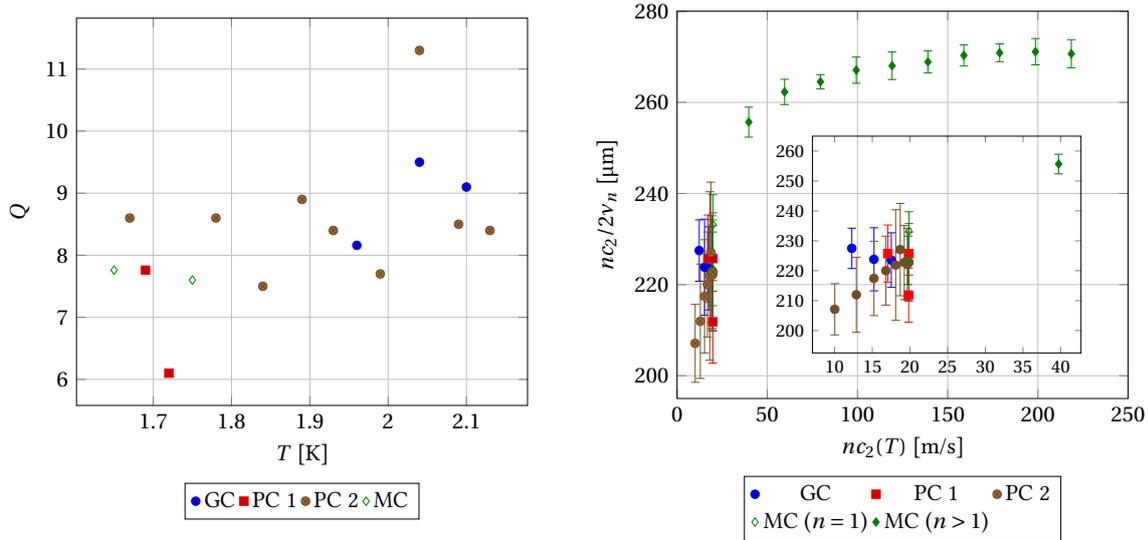


Fig 11 – Mesure de facteur de qualité Q et des fréquences de résonance ν_n en fonction de la vitesse du second son $c_2(T)$. Les points \blacklozenge ont été réalisés à température fixée en variant n , les autres points (\bullet , \blacksquare , \bullet , \blacklozenge) sont des mesures pour $n = 1$ à différentes températures.

second son dans un écoulement de contre-courant.

On choisit tout d'abord une conduite « large », similaire à la conduite utilisée précédemment, avec un diamètre de 24 mm. La conduite est constituée d'un tube en inox de 2 mm d'épaisseur afin que les pertes latérales soient négligeables devant le flux thermique total. La pince à second son est placée dans la bague d'instrumentation, à un peu plus de 6 diamètres en aval du chauffage (voir figure 12). L'étanchéité de la bague d'instrumentation est réalisée à l'aide de joints en indium de part et d'autre de la bague.

Nous avons cherché à concevoir un chauffage qui soit le plus homogène possible et qui minimise le flux résiduel qui peut exister directement du chauffage vers le bain. Pour cela, on dépose un méandre métallique sur un disque de ThermalClad, constitué d'une plaque de cuivre de 2 mm et d'une couche de diélectrique. On choisit un dépôt de 1 μm de cupronickel car c'est un matériau qui reste assez résistif à 4,2 K, avec une conductivité électrique $\rho_{\text{CuNi}} = 44 \mu\Omega\text{cm}$. La résistance du chauffage mesurée à 4,2 K est de 14,1 kΩ. Les alimentations stabilisées disponibles permettent d'imposer facilement une puissance de l'ordre de 30 mW (pour une tension de 20 V), soit une puissance surfacique de 6,6 mW/cm², et une puissance jusqu'à 1,3 W avec une alimentation haute tension (pour 137 V), soit une puissance surfacique 287 mW/cm².

Ce disque de ThermalClad est placé au bas de la conduite et noyé dans l'Araldite. Par ailleurs, un micro-thermomètre MicroSensor est collé sur la plaque de cuivre afin de pouvoir mesurer la température de la plaque.

D'après les mesures de la littérature, réalisées dans des capillaires, par exemple [Cha62], le flux surfacique critique j_c varie entre environ 20 mW/cm² et 180 mW/cm² selon la température (le maximum se trouve pour $T \approx 1,6\text{K}$). Par ailleurs, quelques estimations des nombres de Reynolds que l'on peut atteindre dans la conduite sont données dans la table 2, calculées en combinant les équations 1.34 et 1.36,

$$R_n = \frac{\rho_n \nu_n d}{\eta_n} = \frac{4}{\pi d} \frac{\rho_n}{\rho} \frac{\mathcal{P}}{\eta_n S T} \quad (25)$$

Par conséquent, pour les températures de travail comprises entre 1,6 K et 2 K, le dispositif est capable d'atteindre des flux thermiques surfaciques comparables aux flux critiques observés par TOUGH et des

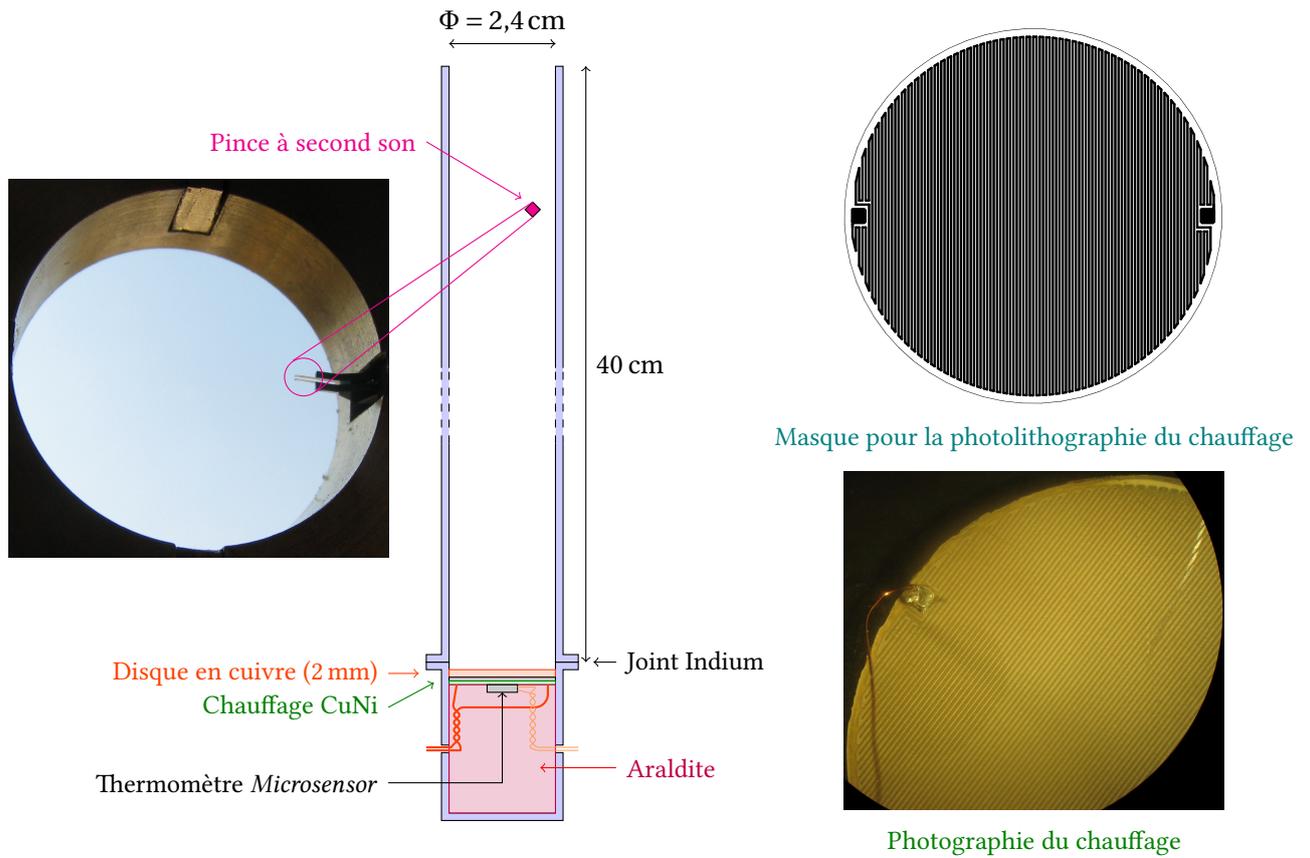


Fig 12 – À gauche : Schéma de la conduite « large » de contre-courant. À droite : Chauffage en cupro-nickel : pistes de $150\ \mu\text{m}$ séparées de $50\ \mu\text{m}$ (soudure étain sur un plot de $1\ \text{mm}^2$)

T [K]	$\mathcal{P} = 20\ \text{mW}$	$\mathcal{P} = 1,3\ \text{W}$
	R_n	
1.6	294	19×10^3
1.8	268	17×10^3
2.0	210	14×10^3

TABLE 2 – Valeurs du nombre de Reynolds de la composante normale R_n estimée pour quelques températures T et quelques puissances thermiques \mathcal{P} avec l'équation 25.

nombres de Reynolds de la composante normale bien plus grands que le nombre de Reynolds critique. On s'attend donc *a priori* à ce que ce chauffage soit suffisant pour atteindre le régime turbulent.

Malheureusement, comme on peut le constater sur la figure 13, on ne mesure pas d'atténuation sensible du pic de résonance de la pince, même pour les puissances surfaciques les plus élevées (c'est-à-dire les Reynolds les plus élevés) qui sont bien plus grandes que les valeurs critiques mesurées dans la littérature. Cependant, les mesures de la littérature sont menées dans des géométries beaucoup plus petites (diamètre de l'ordre du mm) et le flux critique obtenu n'est pas un nombre sans dimension donc il est possible que la valeur soit significativement différente dans notre géométrie.

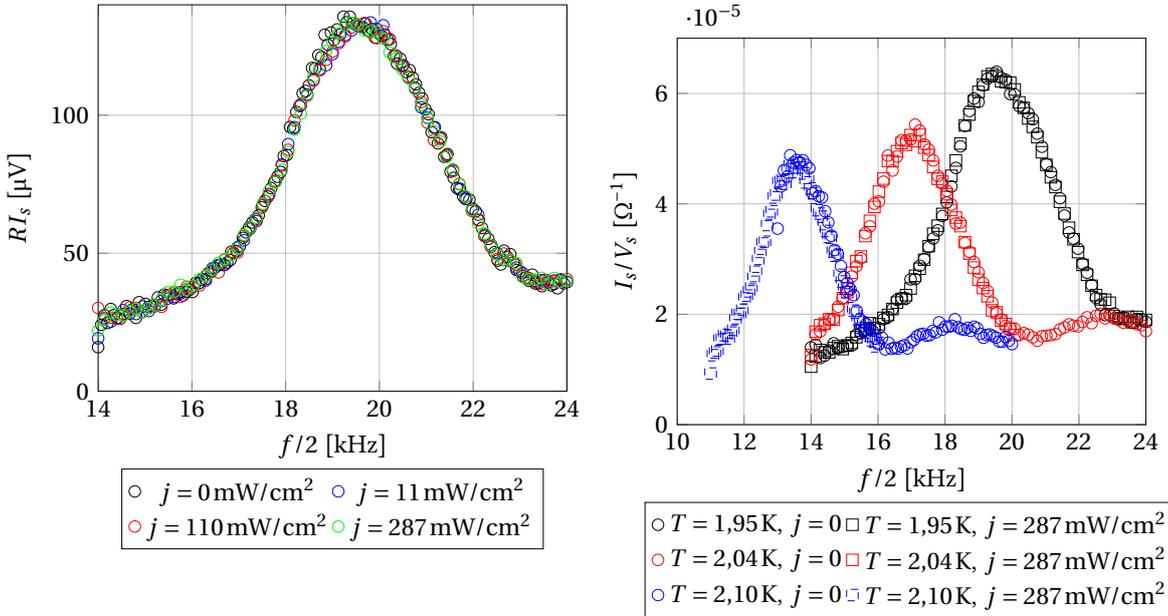


Fig 13 – Résonances de second son avec ou sans contre-courant. À gauche, réponse observée pour $T = 1,95\text{ K}$ et pour différentes valeurs de puissance surfacique j . À droite, réponse observée à différentes températures (le décalage en fréquence est dû à la dépendance de la vitesse du second son c_2 en fonction de la température)

Pour atteindre des flux surfaciques plus élevés, en particulier beaucoup plus grand que 100 mW/cm^2 , on reproduit l'expérience précédente avec un diamètre intérieur de 10 mm au lieu de 24 mm (le nouveau dispositif est schématisé sur la figure 14). Cela augmente le flux surfacique d'un facteur $5,76$ à puissance de chauffage donnée. De plus, on utilise un chauffage de $109,7\ \Omega$ à froid, ce qui permet d'aller plus facilement à des puissances élevées avec les alimentations usuelles de laboratoire. Typiquement, avec une tension d'alimentation de 10 V , on obtient un flux surfacique de 1160 mW/cm^2 qui correspond à un nombre de Reynolds $R_n = 29 \times 10^3$ à $T = 1,8\text{ K}$.

Avec ce dispositif, on parvient cette fois à mesurer une atténuation du pic de résonance (voir figure 15), mais seulement pour des flux surfaciques j bien plus élevés que ceux de la littérature, de l'ordre du W/cm^2 .

De plus, le niveau rms du signal est très faible, il s'est avéré difficile de mesurer directement les fluctuations. Pour améliorer le signal, il a été nécessaire de mettre deux chaînes de mesures en parallèle (voir schéma électronique sur la figure 16). Les signaux mesurés sont $s_1(t)$ et $s_2(t)$ où

$$s_{1,2}(t) = b_{1,2}(t) + a(t) \quad (26)$$

avec $b_1(t)$ le bruit de la chaîne de mesure N°1 et $b_2(t)$ le bruit de la chaîne de mesure N°2. Si ces bruits proviennent du préamplificateur et de la détection synchrone, alors on peut supposer qu'ils sont décorrélés,

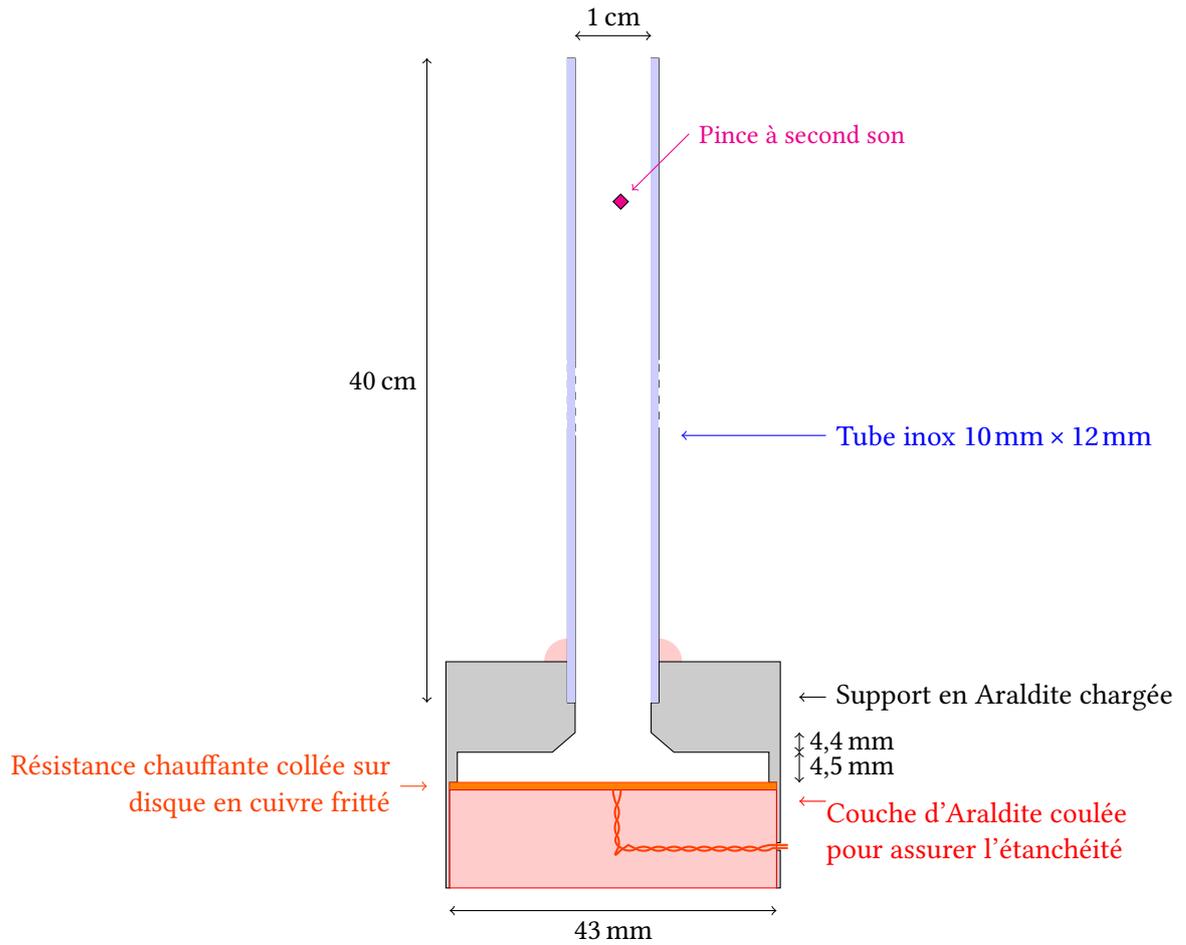


Fig 14 – Schéma de la conduite intermédiaire de contre-courant.

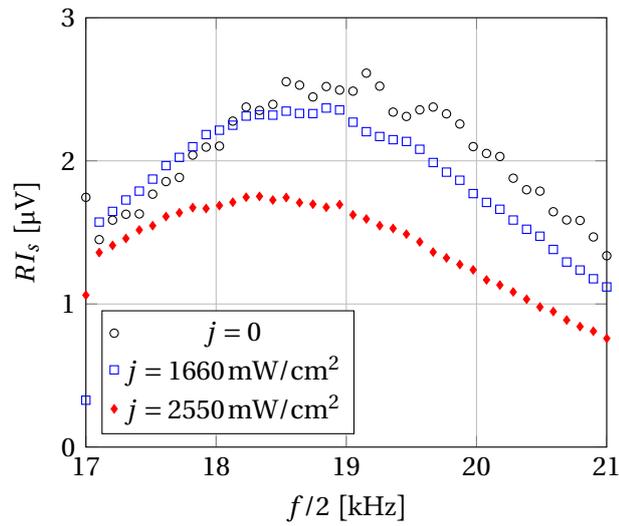


Fig 15 – Pic de résonance mesuré dans la « petite conduite » de contre-courant à $T = 1,98 \text{ K}$.

et donc,

$$\langle b_1(t)b_2(t) \rangle = 0 \quad (27)$$

Par conséquent, on peut calculer le spectre de puissance de la quantité $a(t)$ en s'affranchissant du bruit $b(t)$ en calculant l'interspectre de $s_1(t)$ et $s_2(t)$,

$$P_{12} = |\tilde{s}_1(f)\tilde{s}_2^*(f)|^2 = |\tilde{a}(f)|^2 \quad (28)$$

où $\tilde{s}_{1,2}(f)$ est la transformée de Fourier de $s_{1,2}(t)$

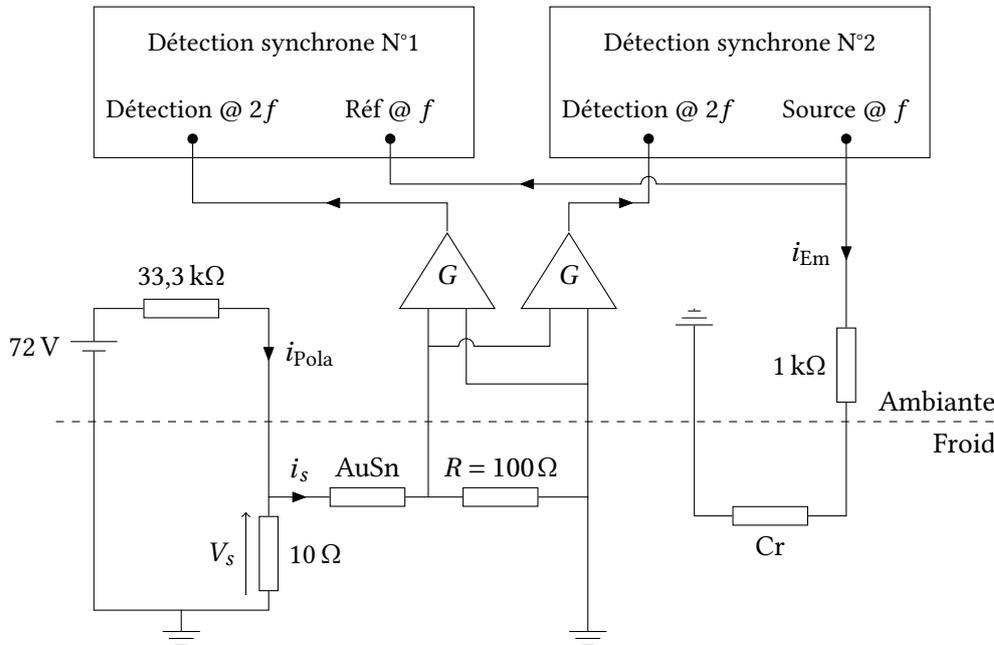


Fig 16 – Circuit électronique mis en œuvre pour mesurer les fluctuations de densité de lignes de vortex de façon à supprimer le bruit des pré-amplificateurs dans la détermination du spectre ou de la rms. Le schéma est proche de celui de la figure 5.3 mais on acquiert le signal par deux chaînes indépendantes.

De plus, pour les flux thermiques les plus élevés, on pouvait entendre périodiquement un bruit de contact type « métal contre métal » non identifié. Il est possible qu'il s'agisse de lâchers d'hélium surchauffé localement qui conduisent à exciter des résonances mécaniques du cryostat. Cependant, les thermomètres placés à différents endroits de l'écoulement, et le thermomètre utilisé pour la régulation de température, ne semblaient pas indiquer de surchauffe significative lorsqu'on entendait ce bruit.

Ce phénomène se traduit par des pics périodiques dans le signal enregistré. La fréquence de ces pics est d'autant plus élevée que le flux thermique est important. La rms du signal entre chaque pic est égale à la rms hors écoulement. Il semble donc que le capteur ne soit pas suffisamment sensible pour mesurer les fluctuations de densité de lignes de vortex dans ce type d'écoulement.

Résumé

Cette thèse s'intéresse à la turbulence dans l'hélium ^4He superfluide, à des températures comprises entre 1,15 K et la température de transition superfluide, $T_\lambda \approx 2,17\text{K}$, ce qui correspond à une fraction de superfluide ρ_s/ρ comprise entre 97,6 % et 0 %. Il s'agit d'un travail essentiellement expérimental dont le but est de comparer la turbulence classique et la turbulence quantique, à l'aide de mesures locales de fluctuations de vitesse et de vorticité. Ces mesures sont complétées par l'analyse de champs de vitesse issus de simulations numériques.

Nous avons développé une instrumentation spécifique, adaptée aux écoulements cryogéniques : des tubes de Pitot miniatures, dont les dimensions effectives ont pu être rendues sub-millimétriques, et un capteur original, basé sur la déflexion d'une micro-poutrelle ($300\mu\text{m} \times 100\mu\text{m} \times 1\mu\text{m}$) mesurée à l'aide d'un micro-résonateur supraconducteur dans la gamme de fréquence du GHz. Un premier prototype de ce capteur, micro-fabriqué à partir d'une galette de silicium, a été réalisé en salle blanche puis validé dans une conduite cryogénique. La résolution spatiale obtenue est du même ordre que celle des meilleurs anémomètres en He II, et il devrait être possible de l'améliorer d'une décade.

Les tubes de Pitot ont été placés dans les souffleries superfluides TSF et TOUPIE. La première, fruit d'une collaboration nationale, a fourni un écoulement stationnaire de grille ($R_\lambda \approx 250$, $1,65\text{K} < T < 2,6\text{K}$, $\rho_s/\rho < 80\%$) et un sillage proche. La seconde soufflerie, refroidie pour la première fois dans le cadre de cette thèse, a fourni un écoulement de sillage lointain ($R_\lambda \approx 1100$, $1,55\text{K} < T < 4,2\text{K}$, $\rho_s/\rho < 86\%$).

Les mesures ont mis en évidence dans ces écoulements des similarités fortes avec les écoulements classiques, *aux échelles inertielles* : spectre de vitesse en $k^{-5/3}$, constante de Kolmogorov et taux de turbulence identiques aux écoulements classiques, loi des 4/5, exposants anormaux pour les fonctions de structures des incréments de vitesse (intermittence). *  plus petite échelle*, les simulations numériques ($1,15\text{K} < T < 2,1565\text{K}$) mettent en évidence un comportement exotique : l'énergie s'accumule et tend vers l'équipartition, ce qui se traduit par un spectre de vitesse simulé en k^2 . Ce phénomène s'accroît à basse température. Enfin, des mesures locales de fluctuation de vorticité ont été réalisées à l'aide de pinces à second son sur une gamme de température comprise entre 1,69 K ($\rho_s/\rho = 77\%$) et 2,01 K ($\rho_s/\rho = 42\%$). Nous avons observé un raidissement de la pente des spectres de vorticité lorsque la température diminue. Ce résultat peut être interprété comme une conséquence du phénomène d'équipartition mis en évidence dans les simulations numériques à petite échelle.

Abstract

The focus of this thesis is the turbulence of superfluid ^4He at temperatures between 1.15 K and the superfluid transition temperature $T_\lambda \approx 2.17\text{K}$, corresponding to a superfluid fraction ρ_s/ρ between 97.6 % and 0 %. This work is mostly experimental. We aim to compare classical and quantum turbulence, using local velocity and vorticity fluctuations measurements. These measurements are backed up by numerical simulations.

We developed dedicated probes, designed for cryogenic flows : Pitot tubes with sub-millimeter effective size and a new cantilever-based probe ($300\mu\text{m} \times 100\mu\text{m} \times 1\mu\text{m}$) whose deflection is measured with a superconducting micro-resonator in the GHz frequency range. A first prototype was micro-machined from a silicon wafer in cleanroom and validated in a superfluid wind tunnel. The resolution was found similar to the one of the best anemometers operating in He II and will be further improved.

The Pitot tubes have been inserted inside two superfluid wind tunnels, TSF and TOUPIE. The former, designed and operated within a national collaboration, provided a stationary grid flow ($R_\lambda \approx 250$, $1.65\text{K} < T < 2.6\text{K}$, $\rho_s/\rho < 80\%$) and a near-wake flow. The latter ($R_\lambda \approx 1100$, $1.55\text{K} < T < 4.2\text{K}$, $\rho_s/\rho < 86\%$), which was cooled down for the first time during this thesis, provided a far-wake flow.

The measurements have highlighted strong similarities with classical flows at *inertial scales* : $k^{-5/3}$ velocity spectra, Kolmogorov constant and turbulence intensity indistinguishable above and below the superfluid transition, 4/5-law, anomalous velocity structure functions exponents (intermittency). *At smaller scales*, the numerical simulations ($1.15\text{K} < T < 2.1565\text{K}$) exhibit exotic behavior : kinetic energy piles up and tends to equipartition, which makes the simulated velocity spectrum scale like k^2 . This phenomenon is enhanced at low temperature. Finally, local vorticity fluctuations measurements have been achieved using second sound tweezers over a temperature range, between 1.69 K ($\rho_s/\rho = 77\%$) and 2.01 K ($\rho_s/\rho = 42\%$). We observed that the spectrum scaling steepens as the temperature decreases. This can be interpreted as a consequence of the equipartitioned reservoir evidenced by numerical simulations at small scale.