Fiche de mécanique du point matériel

I. Systèmes de coordonnées

1. Coordonnées cartésiennes
   - i. $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$
   - ii. $\vec{v}(M) = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$
   - iii. $\vec{a}(M) = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$
   - iv. $\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$
2. Coordonnées cylindriques
   - i. $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$
   - ii. $\vec{v}(M) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta + \dot{z}\vec{e}_z$
   - iii. $\vec{a}(M) = \vec{e}_r\left(\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2\right) + \vec{e}_\vartheta\left(r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta}\right) + \ddot{z}\vec{e}_z$
   - iv. $\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \dfrac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \vartheta}\overrightarrow{e_\vartheta} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$
   - v. Projections : $\begin{cases} \vec{e}_r = \cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta = -\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y \end{cases}$
3. Coordonnées sphériques
   - i. $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$
   - ii. $\vec{v}(M) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta + r\sin\vartheta\dot{\phi}\vec{e}_\phi$
   - iii. $\vec{a}(M) = \left(\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 - r\sin^2\vartheta\dot{\phi}^2\right)\vec{e}_r + \left(r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta} - r\sin\vartheta\cos\vartheta\dot{\phi}^2\right)\vec{e}_\vartheta + \left(r\sin\vartheta\ddot{\phi} + 2\dot{r}\sin\vartheta\dot{\phi} + 2r\cos\vartheta\dot{\vartheta}\dot{\phi}\right)\vec{e}_\phi$
   - iv. $\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \dfrac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \vartheta}\overrightarrow{e_\vartheta} + \dfrac{1}{r\sin\vartheta}\dfrac{\partial f}{\partial \phi}\overrightarrow{e_\phi}$
   - v. Projections : $\begin{cases} \vec{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\vec{e}_y + \cos\theta\vec{e}_z \\ \vec{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\vec{e}_x + \cos\theta\sin\varphi\vec{e}_y - \sin\theta\vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\vec{e}_x + \cos\varphi\vec{e}_y \end{cases}$
4. Abscisse curviligne
   - i. $\vec{\tau} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{ds}$
   - ii. $\dfrac{d\vec{\tau}}{ds} = \dfrac{\vec{n}}{R_c}$
   - iii. $\vec{v}(M) = \dot{s}\vec{\tau}$
   - iv. $\vec{a}(M) = \ddot{s}\vec{\tau} + \dfrac{\dot{s}^2}{R_c}\vec{n}$
   - v. $\vec{v}\cdot\vec{a} = \dfrac{1}{2}\dfrac{dv^2}{dt}$
   - vi. Si le mouvement est circulaire alors
     - A. $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r$
     - B. $\vec{v}(M) = R\cdot\dot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta$
     - C. $s = \pm R\cdot\vartheta + \mathrm{k}$

II. Changement de référentiel

1. Vecteur rotation
   - i. $\vec{\Omega} = \dot{\vartheta}\vec{e}_z$
   - ii. $\vec{v}(M) = \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}$
   - iii. S'il y a plusieurs axes de rotation, les vecteurs $\vec{\Omega}$ se somment.
2. Vecteur vitesse
   - i. $\vec{v}(M)_R = \vec{v}(M)_{R'} + \vec{v}_e(M)_{R'/R}$
   - ii. $\vec{v}_e(M)_{R'/R} = \vec{v}(O')_R + \vec{\Omega}_{R'/R}\wedge\overrightarrow{O'M}$
3. Vecteur accélération
   - i. $\vec{a}(M)_R = \vec{a}(M)_{R'} + \vec{a}_e(M)_{R'/R} + \vec{a}_c(M)_{R'/R}$
   - ii. $\vec{a}_e(M)_{R'/R} = \vec{a}(O')_R + \vec{\Omega}_{R'/R}\wedge(\vec{\Omega}_{R'/R}\wedge\overrightarrow{O'M}) + (\dfrac{d\vec{\Omega}_{R'/R}}{dt})_R\wedge\overrightarrow{O'M}$
   - iii. $\vec{a}_c(M)_{R'/R} = 2\vec{\Omega}_{R'/R}\wedge\vec{v}(M)_{R'}$

III. Dynamique du point matériel

1. $\vec{p}(M)_R = m\vec{v}(M)_R$
2. $\overrightarrow{L_O}(M)_R = \overrightarrow{OM}\wedge\vec{p}(M)_R$
3. $\Delta(O,\vec{e}) : L_\Delta(M)_R = \vec{e}\cdot\overrightarrow{L_O}(M)_R$ avec $O\in\Delta$
4. $\overrightarrow{\mathscr{M}_O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OM}\wedge\vec{F}$
5. $\Delta(O,\vec{e}) : \mathscr{M}_\Delta(\vec{F}) = \vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathscr{M}_O}(\vec{F})$
6. $|\mathscr{M}_\Delta| = d\cdot F$ avec d la distance entre Δ et le support de $\vec{F}$
7. Principe fondamental de la dynamique **dans un référentiel galiléen**
   - i. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{S_i\to M} = m\vec{a}(M)_R$
   - ii. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{S_i\to M} = (\frac{d\vec{p}(M)_R}{dt})_R$
   - iii. $\sum\overrightarrow{\mathscr{M}_O}(\vec{F}) = (\dfrac{d\overrightarrow{L_O}(M)_R}{dt})_R$
   - iv. $\sum\mathscr{M}_\Delta(\vec{F}) = (\dfrac{dL_\Delta(M)_R}{dt})_R$
8. Principe fondamental de la dynamique **dans un référentiel non galiléen**
   - i. $m\vec{a}(M)_{R'} = \sum\vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$
   - ii. $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e(M)_{R'/R}$
   - iii. $\vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_c(M)_{R'/R}$
   - iv. Le théorème du moment cinétique reste applicable en ajoutant à droite les moments des forces d'inertie.

IV. Travail et travail d'une force

1. Travail élémentaire : $\delta W(\vec{F})_R = \vec{F}\cdot d\overrightarrow{OM}$
2. Travail total : $W_{M_1\to M_2}(\vec{F})_R = \displaystyle\int_{\widehat{M_1M_2}}\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{OM}$
3. Puissance : $P(\overrightarrow{F})_R = \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{v}(M)_R$
4. Lien avec le travail : $\delta W(\overrightarrow{F})_R = P(\overrightarrow{F})_R dt$

V. Energie cinétique

1. $E_C(M)_R = \dfrac{1}{2}mv(M)_R^2$
2. Dans un **référentiel galiléen**
   - i. $\dfrac{dE_C(M)_R}{dt} = \sum P(\overrightarrow{F})$
   - ii. $dE_C = \sum\delta W(\overrightarrow{F})$
   - iii. $E_C(t_2) - E_C(t_1) = \sum W(\overrightarrow{F})_{t_1\to t_2}$
3. Dans un **référentiel non galiléen**
   - i. $\dfrac{dE_C(M)_R}{dt} = P(\sum\overrightarrow{F}) + P(\overrightarrow{F}_{ie})$
   - ii. $E_C(t_2) - E_C(t_1) = W(\sum\overrightarrow{F}) + W(\overrightarrow{F}_{ie})$

VI. Force conservative et énergie potentielle

1. Si $\overrightarrow{F}$ est conservative alors $\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}E_{\text{pot}}(P)$

2. $\mathrm{d}E_{\text{pot}} = -\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$[1]
   $= -\delta W(\overrightarrow{F})$
3. Théorème de l'énergie mécanique :
   $\dfrac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = P(\overrightarrow{F}_{\text{nc}})$
4. $E_{\text{pp}} = mgz + \text{cte}$ ($\overrightarrow{e_z}$ ascendent)
5. $E_{\text{p élastique}} = \dfrac{1}{2}k(l-l_0)^2 + \text{cte}$
6. $E_{\text{pa}} = -\dfrac{1}{2}m\omega^2 r^2 + \text{cte}$

VII. Équilibre d'un point matériel
1. Si M est repéré par une seule coordonnée x alors les positions d'équilibres sont telles que $\dfrac{\mathrm{d}E_P}{\mathrm{d}x} = 0$
   La position est dite « stable » si $\dfrac{\mathrm{d}^2E_P}{\mathrm{d}x^2} > 0$
   La position est dite « instable » si $\dfrac{\mathrm{d}^2E_P}{\mathrm{d}x^2} < 0$

VIII. Interaction gravitationnelle
1. $\overrightarrow{F}_{A\to B} = -G\dfrac{m_A m_B}{r^2}\overrightarrow{u}_{AB}$
2. $\overrightarrow{\mathscr{G}}(M) = -G\dfrac{m_O}{r^2}\overrightarrow{e_r} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$
   soit $V = -G\dfrac{m_0}{r} + \text{cte}$
3. $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{\mathscr{G}} = -\overrightarrow{\text{grad}}E_P$
   soit $E_P = mV = -G\dfrac{m_O m}{r} + \text{cte}$

IX. Interaction électromagnétique
1. $\overrightarrow{F} = q\left[\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{B}\right]$
2. Changement de référentiel galiléen :
   $\overrightarrow{E}_{R'} = \overrightarrow{E}_R + \overrightarrow{v}_{eR'/R}\wedge\overrightarrow{B}_R$
   $\overrightarrow{B}_{R'} = \overrightarrow{B}_R$
3. $E_{\text{p élec}} = qV$
4. $\delta W = -\mathrm{d}E_p \Rightarrow W_{A\to B} = -q\displaystyle\int_A^B \mathrm{d}V = qU_{AB}$
5. $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$
6. $\mathrm{d}V = -\overrightarrow{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$

X. Mouvement des porteurs de charge dans un conducteur
1. $\mathrm{d}N = n\mathrm{d}v$ avec n densité volumique de porteurs, $\mathrm{d}v$ le volume considéré
2. $\overrightarrow{v} = \mu\overrightarrow{E}$ avec $\mu = \dfrac{q\tau}{m}$ la mobilité des porteurs
3. $\overrightarrow{j} = nq\overrightarrow{v} = \rho\overrightarrow{v}$ la densité volumique de courant ($\rho = nq$ est la densité volumique de charge)
4. $I = \displaystyle\iint_S \overrightarrow{j}\cdot\mathrm{d}S\overrightarrow{n}$
   dans un cas simple : $I = jS$
5. Loi d'Ohm locale : $\overrightarrow{j} = \sigma\overrightarrow{E}$
   avec $\sigma = \dfrac{nq^2\tau}{m}$ la conductivité électrique
6. Loi d'Ohm intégrale : $I = \displaystyle\iint_S \overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{n}\mathrm{d}S$
   $I = \dfrac{\sigma S}{l}U$
7. $G = \dfrac{\sigma S}{l}$
8. $R = \dfrac{l}{\sigma S}$
9. Force de Laplace : $\mathrm{d}\overrightarrow{F} = \overrightarrow{j}\wedge\overrightarrow{B}\mathrm{d}v$
   Pour un conducteur filiforme : $\overrightarrow{j}\cdot\mathrm{d}v = \overrightarrow{j}\cdot S\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{l} = I\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{l}$
   soit $\mathrm{d}\overrightarrow{F} = I\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{l}\wedge\overrightarrow{B}$

XI. Mécanique au voisinage de la Terre
1. $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{C}$
   avec $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\mathscr{G}}_{\text{Terre}} - \overrightarrow{\Omega}\wedge(\overrightarrow{\Omega}\wedge\overrightarrow{GM})$
   et $\overrightarrow{C} = \overrightarrow{\mathscr{G}}_{\text{Astres}} - \overrightarrow{a}(G)_{R_C}$
2. Force de Coriolis : $\overrightarrow{F} = -2m\overrightarrow{\Omega}\wedge\overrightarrow{v}(M)_{R_T}$

[1] Ceci découle de la définition du gradient : $\mathrm{d}f = \overrightarrow{\text{grad}}\,f\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$