MÉCANIQUE DES FLUIDES

I. Statique des fluides

- Force de pression : $d\vec{F} = P(M)\,dS\,\vec{n}$
  $d\vec{F}_P = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P\,d\tau$
- Relation fondamentale de la statique : $\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\,P = \vec{f}_v}$
- Cas particulier fréquent : $\overrightarrow{\text{grad}}\,P = \rho\vec{g} \Rightarrow P(z) = P_0 - \rho g z$ (axe vers le haut)

II. Généralités sur la cinématique des fluides

- $\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\,\vec{v} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{v^2}{2} + \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}\wedge\vec{v}}$
- $\boxed{\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}}$
- $\vec{j}(M) = \rho(M)\,\vec{v}(M)$
- Débit massique : $\boxed{D_m = \dfrac{dm}{dt} = \iint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}}$
- Débit volumique : $\boxed{D_v = \dfrac{dV}{dt} = \iint_S \vec{v}\cdot d\vec{S}}$
- Pour les fluides incompressibles : $D_m = \rho D_v$
- Conservation de la masse : $\boxed{\text{div}\,\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0}$

III. Écoulements

- Écoulement incompressible
  i. $\frac{d\rho}{dt} = 0$
  ii. $\boxed{\text{div}\,\vec{v} = 0}$
  iii. Conservation du débit volumique : $D_v = SV = S_1V_1 + S_2V_2$ (loi des nœuds)
- Écoulement irrotationnel
  i. $\vec{\Omega} = \vec{0}$
  ii. $\vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi$
  iii. Si de plus $\text{div}\,\vec{v} = 0$ alors $\Delta\varphi = 0$ (équation de LAPLACE)
- Écoulement rotationnel
  i. $\vec{\Omega} \neq \vec{0}$
  ii. $\mathscr{C} = \oint \vec{v}\cdot d\vec{l} = 2\iint \vec{\Omega}\,d\vec{S} \neq 0$
  iii. Cas particulier : $\vec{v} = \frac{U}{r}\vec{u}_\theta$
  $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \vec{0}$ si $r = 0$; $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} \neq \vec{0}$ en $r = 0$.
  Un tube de tourbillon de très petite taille est appelé *vortex*.

IV. Dynamique des fluides

- Équation d'EULER : $\boxed{\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho\vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}}\,P + \vec{f_a}}$
- Théorème de BERNOULLI

$$Ⓗ \begin{cases} \text{Fuide parfait} \\ \vec{f_a} = \vec{0} \\ \text{Écoulement permanent } \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0} \\ \text{Écoulement incompressible } \rho = \text{cte} \end{cases} \qquad Ⓒ\ \frac{v^2}{2} + gz + \frac{P}{\rho} = K(L)$$

$$Ⓗ \begin{cases} \text{Fuide parfait} \\ \vec{f_a} = \vec{0} \\ \text{Écoulement permanent } \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0} \\ \text{Écoulement incompressible } \rho = \text{cte} \\ \text{Écoulement irrotationnel } \vec{\Omega} = \vec{0} \end{cases} \qquad Ⓒ\ \frac{v^2}{2} + gz + \frac{P}{\rho} = K$$

- Théorème d'EULER : $\frac{d\vec{p}}{dt} = D_m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$ (sortie - entrée)

V. Notions sur les fluides réels

- Traînée d'une sphère dans un fluide :
  - $\boxed{\vec{F} = -6\pi\eta r\vec{v}}$ pour une « vitesse faible »
  - $\boxed{\vec{F} = -\frac{1}{2}\rho\pi r^2 v\vec{v}}$ pour une « vitesse élevée »
- $\nu = \frac{\eta}{\rho}$
- Nombre de REYNOLDS : $\mathscr{R}e = \frac{\rho L v}{\eta} = \frac{Lv}{\nu}$
- Expression générale de la traînée : $\boxed{F = C_x \frac{\rho v^2}{2} S}$
- Écoulement laminaire : $\mathscr{R}e < 1$ et $C_x = \frac{k}{\mathscr{R}e}$
  Alors $F = \frac{k}{2}\eta L v$
- Écoulement turbulent :$\mathscr{R}e > 1000$ et $C_x = 1$ (pour une sphère)
  Alors $F = \frac{\rho v^2}{2} \cdot S$
- Expression surfacique de la force de viscosité : $\boxed{d\vec{F}_{1\to 2} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial t} dS\,\vec{u}_x}$
- Expression volumique de la force de viscosité : $\boxed{\vec{f_v} = \eta\Delta\vec{v}}$
- Équation de NAVIER-STOKES : $\boxed{\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\,\vec{v}\right) = \rho\vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}}\,P + \eta\Delta\vec{v}}$
- Couche limite : $\boxed{\delta = \frac{L}{\sqrt{\mathscr{R}e}}}$