ÉLECTROSTATIQUE — MAGNÉTOSTATIQUE

I. Symétrie et invariances

1. Invariance par toute translation d'axe (Oz) alors ϱ est indépendant de z.
2. Invariance par toute rotation autours de l'axe (Oz) alors ϱ est indépendant de θ.
3. Une distribution a une symétrie cylindrique autours d'un axe Δ si elle est invariante par translation et par rotation d'axe Δ. ϱ est alors indépendant de θ et de z donc $\varrho = \varrho(r)$ (en coordonnées cylindrique)
4. Une distribution a une symétrie sphérique autours d'un point O si elle est invariante par rotation autours de tout axe passant par O alors $\varrho = \varrho(r)$ (en coordonnées spériques)
5. Si M est dans un plan de symétrie alors $\overrightarrow{\mathrm{E}}_\perp(\mathrm{M}) = \overrightarrow{0}$
6. Si M est dans un plan d'antisymétrie alors $\overrightarrow{\mathrm{E}}_{//} = \overrightarrow{0}$

II. Circulation

- $\mathrm{C}(\overrightarrow{\mathrm{E}})_\Gamma = \displaystyle\int_{\Gamma(\mathrm{A}\to\mathrm{B})} \overrightarrow{\mathrm{E}}(\mathrm{M})\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_\mathrm{A}} - \frac{1}{r_\mathrm{B}}\right)$
- $\displaystyle\oint \overrightarrow{\mathrm{E}}\cdot \mathrm{dOM} = \overrightarrow{0}$
- $\mathrm{V(M)} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \mathrm{cte}$ (spérique)
- $\mathrm{C}(\overrightarrow{\mathrm{E}})_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = \mathrm{V_A} - \mathrm{V_B}$
- $\overrightarrow{\mathrm{E}}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = -\mathrm{dV}$
- $\overrightarrow{\mathrm{E}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{V})$
- $\overrightarrow{\mathrm{F}}(\mathrm{M}) = q\overrightarrow{\mathrm{E}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\mathrm{E_P}$ avec $\mathrm{E_P} = q\mathrm{V}$

III. Flux

- Angle solide $\Omega = \dfrac{\mathrm{S}_r}{r^2}$ et $\mathrm{d}\Omega = \dfrac{\mathrm{dS}(\overrightarrow{\mathrm{N}}\cdot\overrightarrow{e_r})}{r^2}$
- Angle solide total 4π
- Pour une surface fermée, l'angle solide vaut 0 si le point est à l'intérieur, 4π sinon.
- $\mathrm{d}\Phi = \overrightarrow{\mathrm{E}}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{S}} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\mathrm{d}\Omega$
- $\Phi(\overrightarrow{\mathrm{E}})_\mathrm{S} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Omega$ avec Ω l'angle solide de S depuis le point O.
- Théorème de Gauss $\Phi(\overrightarrow{\mathrm{E}})_{\mathrm{Sferm\acute{e}e}} = \displaystyle\oiint_\mathrm{S} \overrightarrow{\mathrm{E}}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{S}} = \frac{\mathrm{Q_{int}}}{\varepsilon_0}$
- Conséquence : discontinuité du champ à travers une surface fermée $\overrightarrow{\mathrm{E}}_2 - \overrightarrow{\mathrm{E}}_1 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{n}_{1\to2}$

IV. Calculs de champ et potentiel pour une distribution continue

- $\overrightarrow{\mathrm{E}}(\mathrm{M}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\iiint_\mathrm{V} \frac{\varrho(\mathrm{P})\mathrm{d}\tau\overrightarrow{\mathrm{PM}}}{\mathrm{PM}^3}$
- $\mathrm{V(M)} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\iiint_\mathrm{V} \frac{\varrho(\mathrm{M})\mathrm{d}\tau}{\mathrm{PM}}$
- Pour une distribution qui possède des symétries et invariances, on peut trouver une surface fermée adaptée qui permet de déduire le champ directement par application de théorème de Gauss.

V. Dipôles électrostatiques

- $\overrightarrow{p} = q\cdot\overrightarrow{\mathrm{NP}}$
- Si $\overrightarrow{p} = qd\overrightarrow{e_z}$ alors
  - $\mathrm{V(M)} = \dfrac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ (en coordonnées sphériques)
  - $\overrightarrow{\mathrm{E}}(\mathrm{M}) = \dfrac{p\left(2\cos\theta\overrightarrow{e_r} + \sin\theta\overrightarrow{e_\theta}\right)}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$
- Expression intrinsèque
  - $\mathrm{V(M)} = \dfrac{\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{4\pi\varepsilon_0 \mathrm{OM}^3}$
  - $\overrightarrow{\mathrm{E}}(\mathrm{M}) = \dfrac{3(\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}})\overrightarrow{\mathrm{OM}} - (\mathrm{OM})^2\overrightarrow{p}}{4\pi\varepsilon_0(\mathrm{OM})^5}$
- Force subie par le dipôle : $\left(\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{\mathrm{E}}$
- Moment subi par le dipôle : $\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{p}\wedge\overrightarrow{\mathrm{E}}$
- Énergie potentielle d'un dipôle rigide dans un champ : $\mathrm{E_P} = -\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{\mathrm{E}}$

VI. Courant électrique

- $dQ = I(t)dt$
- Distribution volumique $dI = \vec{j} \cdot dS\vec{n}$
- $\vec{j} = \varrho\vec{v}$
- $d\vec{C} = \vec{j}\,d\tau$
- Distribution surfacique $dI = \vec{j_S} \cdot dl\vec{n}$
- $\vec{j_S} = \sigma\vec{v}$
- $d\vec{C} = \vec{j_S}dS$
- Distribution linéïque $\vec{I} = I\vec{\tau}$
- $\vec{I} = \lambda\vec{v}$
- $d\vec{C} = \vec{I}\,dl$

VII. Le champ magnétique

- Particule chargée $\vec{F} = q\vec{v}(A)_R \wedge \vec{B}(M)$
- Élément de circuit $\vec{F} = Id\vec{l} \wedge \vec{B}(M)$
- Biot et Savart $d\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}d\vec{C}(P) \wedge \dfrac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$
- $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,H/m$

VIII. Symétries et invariances en magnétostatique

- Un plan de symétrie Π pour la distribution de courant est un plan d'antisymétrie pour le champ $\vec{B}$
  En particulier, pour $M \in \Pi$ on a $\vec{B} \perp \Pi$
- Un plan d'antisymétrie Π^* pour la distribution de courant est un plan de symétrie pour le champ $\vec{B}$
  Pour $M \in \Pi^*$ on a $\vec{B} \parallel \Pi^*$

IX. Quelques champs usuels

- Fil rectiligne infini $\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e_\theta}$
- Spire circulaire (sur l'axe) $\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\alpha\vec{e_z}$
- Solénoïde (sur l'axe) $\vec{B}(M) = \mu_0 nI\vec{e_z}$

X. Circulation et flux

- Le flux du champ magnétostatique est conservatif $\oiint \vec{B} \cdot dS\vec{n} = 0$
- Conséquence $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ avec A potentiel vecteur
- Théorème d'Ampère $\oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enlacée}$
- Discontinuité du champ à travers une surface $\vec{B_2} - \vec{B_1} = \mu_0\vec{j_S} \wedge \vec{n}_{1\to2}$

XI. Dipôle magnétostatique

- Moment magnétique : $\vec{m} = I \cdot \vec{S}$
- Spire de rayon a : $\vec{m} = \pi a^2 I\vec{n}$
- Champ créé par le dipôle $\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0 m}{4\pi}\dfrac{2\cos\theta\vec{e_r} + \sin\theta\vec{e_\theta}}{r^3}$
- Autre expression : $\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{3(\vec{m}\cdot\vec{e_r})\vec{e_r} - \vec{m}}{r^3}$
- Énergie potentielle du dipôle placé dans un champ $E_P = -\vec{m} \cdot \vec{B}$
- Moment appliquée au dipôle $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$