Déterminants

1. Soit $M = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pose $M(x) = \det[a_{i,j} + x]$. montrer que $M(x)$ est un polinôme de degré au plus un en x en retranchant la première colonne à toutes les autres
   Principe : Suivre le principe et développer selon la première colonne
2. Soit $M = [\sup\{i,j\}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer $\det(M)$
   Principe : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ n & \dots & \dots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & (1) \\ 2 & 0 & \ddots & \\ \vdots & (0) & \ddots & 1 \\ n & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} n$
   On fait successivement $C_{i+1} \leftarrow C_{i+1} - C_i$, puis développement par rapport à la dernière ligne
3. Calculer le déterminant de la matrice A définie par $a_{i,j} = x_i^{j-1}$ où $x_1, x_2, ..., x_n$ sont n réels. (Vandermonde)
   Principe :
   1ère **Méthode :** $C_i \leftarrow C_i - x_1 C_{i-1}$, développement par rapport à la première ligne, factorisation et conclusion par récurrence
   2ème **Méthode :** $C_n \leftarrow \sum_{i=1}^{n-1} a_i x^i$ Alors, $A = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & P(x_1) \\ | & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & P(x_n) \end{vmatrix}$ avec $P : X \longmapsto \prod_{i=1}^{n-1} (X - x_i)$
   Puis développement par rapport à la dernière colonne, et conclusion par récurrence.
4. Calculer le déterminant suivant : $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a^3 & 1 & a & a^2 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a & a^2 & a^3 & 1 \end{vmatrix}$
   Principe : $L_i \leftarrow L_i - aL_{i+1}, i \in [1,3] \bigcap \mathbb{N}$
5. Calculer le déterminant suivant $\begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}$
   Principe : $C_1 \longleftarrow C_1 - C_4$ et $C_2 \longleftarrow C_2 - C_3$. Factoriser $(a^2 - b^2)^2$, puis $C_1 \longleftarrow \sum_{i=1}^{4} C_i$. Factoriser $(a+b)^2$, continuer avec un développement selon la première ligne puis $C_2 \longleftarrow C_2 - C_3$. Enfin développement selon la première colonne.
   On obtient $(a^2 - b^2)^4$...
6. On donne a, b, c et une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), M = \begin{bmatrix} a & b & \dots & b & b \\ c & a & \ddots & b & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c & c & \ddots & a & b \\ c & c & \dots & c & a \end{bmatrix}$. Calculer $\det(M)$ en utilisant l'exercice 1 si $b \neq c$
   Principe :
   $b \neq c$ On utilise le fait que $M(x)$ soit un polynôme du premier degré de la forme $M(x) = \lambda x + \det(M)$, et on calcule $M(-b)$ et $M(-c)$. On obtient $\begin{cases} -\lambda b + \det(M) = (a-b)^n \\ -\lambda c + \det(M) = (a-c)^n \end{cases}$, d'où $\det(M)$
   $b = c$ $C_1 \longleftarrow \sum_{i=1}^{n} C_i$, factoriser par $a + (n-1)b$, puis $L_i \longleftarrow L_i - L_{i+1}$, et développement selon la 1ère ligne
7. Soit $M = [a_i^j] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $a_{i,j} = \inf(i,j)$. Calculer $\det(M)$ en remarquant que $M = T\,{}^tT$ avec $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}$
   Principe : Suivre la remarque...

8. Montrer que $\det[\delta_{i,j} + a_i b_j]$ vaut $1 + \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ en utilisant la n-linéarité du déterminant et le vecteur $\overrightarrow{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{e_i}$

Principe : $\det[\delta_{i,j} + a_i b_j] = \det[\overrightarrow{e_1} + b_1 \overrightarrow{a}, \dots, \overrightarrow{e_n} + b_n \overrightarrow{a}] = \det[\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}] + \sum_{i=1}^{n} b_i \det[\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_{i-1}}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{e_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{e_n}] = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$

9. Calculer le déterminant $D_4 = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$.

Généraliser par récurrence ce résultat au calcul d'un déterminant d'ordre n de ce type

Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ \vdots & n & \ddots & \ddots & \vdots \\ 3 & \vdots & \ddots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{vmatrix}$

Principe :

→ On remarque que $D_n - (a+b)D_{n-1} + abD_{n-2} = 0$, D_1 et D_2 sont faciles à calculer.

→ Déterminant du dessous : $L_1 \longleftarrow \sum_{i=1}^{n} L_i$ puis $C_i \longleftarrow C_i - C_{i+1}$ et on se ramène ainsi à l'exercice 6. b)

10. Calculer $\begin{vmatrix} x & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & x & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & x & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & x \end{vmatrix}$

Principe : $C_1 \longleftarrow \sum_{i=1}^{n} C_i$ puis $C_k \longleftarrow C_k - a_k C_1 \Rightarrow$ matrice triangulaire

11. Soit $M = \begin{bmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & ⋰ & 0 \\ \vdots & 0 & a & b & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & b & a & 0 & \vdots \\ 0 & ⋰ & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ b & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{K})$ Calculer $\det(M)$

Principe : $\forall i \in [1, n] \bigcap \mathbb{N}, C_i \longleftarrow C_i + C_{2n+1-i}$ puis $L_{n+i} \longleftarrow L_{n+i} - L_{n+1-i} \Rightarrow \det(M) = \begin{vmatrix} a+b & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ & \ddots & (0) & (0) & ⋰ & 0 \\ & & a+b & b & (0) & \vdots \\ & & 0 & a-b & (0) & \vdots \\ & (0) & & & \ddots & 0 \\ & & & & & a-b \end{vmatrix}$

12. En écrivant $\cos(nx)$ en fonction de $\cos(x)$ et en utilisant le déterminant de Vandermonde, calculer :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) & \cos(3a) & \cos(4a) \\ 1 & \cos(b) & \cos(2b) & \cos(3b) & \cos(4b) \\ 1 & \cos(c) & \cos(2c) & \cos(3c) & \cos(4c) \\ 1 & \cos(d) & \cos(2d) & \cos(3d) & \cos(4d) \\ 1 & \cos(e) & \cos(2e) & \cos(3e) & \cos(4e) \end{vmatrix}$$

Principe : Linéarisation et Vandermonde...
Généralisation : $\partial° P_k = k, k \in [0, n] \bigcap \mathbb{N}, M = [P_{j-1}(x_i)]$ alors $\det(M) = \prod_{1 \le i < j \le n} \alpha_i (x_j - x_i)$, où α_i est le coeff dominant de P_i

13. Calculer en utilisant un déterminant de Vandermonde : $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{p-1} & a_1^{p+1} & \dots & a_1^n \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{p-1} & a_2^{p+1} & \dots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & \dots & a_{n-1}^{p-1} & a_{n-1}^{p+1} & \dots & a_{n-1}^n \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{p-1} & a_n^{p+1} & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$

Principe : On considère $\mathrm{P}(x) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{p-1} & a_1^{p} & \dots & a_1^n \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{p-1} & a_2^{p} & \dots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & \dots & a_{n-1}^{p-1} & a_{n-1}^{p} & \dots & a_{n-1}^n \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{p-1} & a_n^{p} & \dots & a_n^n \\ 1 & x & \dots & x^{p-1} & x^{p} & \dots & x^n \end{vmatrix}$.

On développe par rapport à la dernière ligne, on obtient $\mathrm{P}(x) = \mathrm{V}(a_1,...,a_n)\prod_{k)1}^{n}(x - a_k$

Le déterminant cherché est alors le coefficient d'ordre p de $\mathrm{P}(x)$, à savoir $\mathrm{D} = \mathrm{V}(a_1,...,a_n)(-1)^{n-p}\sum_{1\le i_1<...<i_{n-p}\le n} a_{i_1} * ... * a_{i_{n-p}}$

14. Calculer le déterminant et la trace de l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ défini par : $\mathrm{M} \longmapsto {}^t\,\mathrm{M}$

Principe : On se place dans une base adaptée : $\mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \bigoplus \mathscr{A}\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$

La matrice associée à l'endomorphisme est alors $\Phi = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{\frac{n(n+1)}{2}} & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_{\frac{n(n-1)}{2}} \end{bmatrix}$ On obtient $\mathrm{Tr}\,(\Phi) = n$ et $\det(\Phi) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

15. Calculer $\Delta = \begin{vmatrix} x+a_1 & x & & & x \\ x & x+a_2 & & (x) & \\ & & \ddots & & \\ & & (x) & x+a_{n-1} & x \\ x & & & x & x+a_n \end{vmatrix}$

Principe : On peut dériver Δ, puis $\mathrm{C}_i \longleftarrow \mathrm{C}_i - x\mathrm{C}_k \Rightarrow \Delta' = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} a_1 & 0 & & & & \\ * & \ddots & \ddots & & (0) & \\ & \ddots & a_{k-1} & 0 & & \\ & & * & a_{k+1} & \ddots & \\ & (*) & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & * & a_n \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n}\prod_{i=1, i\neq k}^{n} a_i$

16. Calculer $\begin{vmatrix} x^2+1 & x & \dots & \dots & x \\ x & x^2+1 & \ddots & (x) & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & (x) & \ddots & x^2+1 & x \\ x & \dots & \dots & x & x^2+1 \end{vmatrix}$

Principe : $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{C}_i \longrightarrow \mathrm{C}_1$ puis $\forall\, i \in [2,n] \bigcap \mathbb{N}, \mathrm{L}_i \longleftarrow \mathrm{L}_i - \mathrm{L}_1$ (cf Ex 6. b))

17. Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficient réels telle que $\mathrm{A}^2 = -\mathrm{I}_n$. Montrer que n est pair

Principe : $\det(\mathrm{A}^2) = \det(\mathrm{A})^2 = (-1)^n \Rightarrow n$ pair

18. **5/2** : Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel réel E de dimension finie n tel que $f^2 = -\mathrm{Id}_\mathrm{E}$. Montrer qu'il existe un entier naturel p tel que $n = 2p$ et établir qu'il existe une base de E de la forme $(x_1, f(x_1), x_2, f(x_2), ..., x_p, f(x_p))$

Principe : cf Ex 17. pour la première partie. Pour la base, on construit une famille libre par récurrence. A l'étape k, on a une famille libre de $2(k-1)(< n)$ vecteur de E. Donc $\exists x_k \in \mathrm{E}/(x_1, f(x_1), x_2, f(x_2), ..., x_k)$ soit libre. On montre ensuite par l'absurde que $(x_1, f(x_1), x_2, f(x_2), ..., x_k, f(x_k))$ est libre (en composant par f l'égalité de "famille liée" on obtient $\lambda^2 = -1$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$)

19. Soit A, B, C trois matrices carrées d'ordre $n > 1$ telles que $A = BC - CB$

a) Pour $n = 2$ montrer par un exemple simple que A peut être inversible

b) Montrer que A ne peut pas être égale à I_n

c) Montrer que, si A commute avec C, le déterminant de A est nul

Principe :

a) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\mathrm{Tr}(A) = 0 \neq n = \mathrm{Tr}(I_n)$

c) Si $\det(A) \neq 0, A^{-1}C = CA^{-1} \Rightarrow (BA^{-1})C - C(BA^{-1}) = I_n$. Contradiction avec b)

20. Calculer le déterminant de la matrice $A = [\cos(x_i + x_j]_{1 \leq i,j \leq n}$ pour $n > 2$

Principe : On développe le cos : $C_j = \cos(x_j)\begin{bmatrix} \cos(x_1) \\ \vdots \\ \cos(x_n) \end{bmatrix} - \sin(x_j)\begin{bmatrix} \sin(x_1) \\ \vdots \\ \sin(x_n) \end{bmatrix}$ On en déduit $\boldsymbol{rg}(A) \leq 2 \Rightarrow \boldsymbol{rg}(A) < n$. Donc $\det(A) = 0$

21. Calculer le déterminant de $M = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$ en fonction de ceux de $A - B$ et $A + B$

Principe : $\det \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & B \\ A+B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & B \\ 0 & A-B \end{vmatrix}$

22. Soit A, B, C, D quatre matrices carrées d'ordre n. Calculer $\det M = \begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix}$ en fonction de $\det(DA - BC)$ sachant que

5/2 A et C commutent.

3/2 A et C commutent et A est inversible

Principe :

Si A est inversible $\det(M) = \begin{vmatrix} A & C \\ B & D \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} A^{-1} & -C \\ 0 & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & 0 \\ BA^{-1} & DA - BC \end{vmatrix}$

Si A n'est pas inversible, soit $r = \inf\{|\lambda|, \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\} \bigcup \{1\}$. Alors $\forall x \in]0, r[, A + xI_n \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. On passe ensuite à la limite en 0, en utilisant la continuité du déterminant