- ***Méthode 1 :*** Utiliser 1 et une formule classique. Ex 2., 2.bis, ...
- ***Méthode 2 :*** Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ (ou le supposer dans un premier temps) puis dériver pour obtenir une équation différentielle. Ex 1-a), 4-b), 11, ...
  Dans tout les cas prendre des cas particuliers pour obtenir $f(0), f'(0)$ ...
- ***Méthode 3 :*** **(rare)** Utiliser le cas dégalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Fonctions caractérisées par une équation

Déterminer les fonctions qui vérifient les propriétés suivantes :

1. f est continue sur $\mathbb{R}$ et :
   a) $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x)+f(y)$
   b) $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x)f(y)$

   Principe :

   Méthode 1 $f(0) = 0 et f(x) = -f(-x)$ puis $\forall n\in\mathbb{N}, f(nx) = nf(x)$ démontré par récurrence.
   On passe ensuite aux rationnels $\forall (p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*, f(\frac{p}{q}x) = \frac{p}{q}f(x)$, en calculant $f(q*\frac{p}{q}x) = f(p*x)$
   Enfin la continuité de f donne $f(x) = xf(1)$ car tout réel est limite d'une suite de rationnels.

   Méthode 2 $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ démontrer avec $f(x) = \int_0^1 f(x+y)-f(y)\mathrm{d}y$. Puis dériver l'égalité et équation différentielle.
   Attention, avec cette méthode, la réciproque est obligatoire.

   Pour le b), utiliser $g = \ln(f)$

2. f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et :
   a) $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2_{+,*}, f(xy) = f(x)+f(y)$
   b) $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2_{+,*}, f(xy) = yf(x)+xf(y)$

   Principe :
   a) Utiliser $g = f\circ\exp$ et se ramener au 1. a)
   b) Utiliser $g = \frac{f(x)}{x}$, diviser par xy et utiliser le a) ou $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$ et dériver par rapport à x et fixer y pour obtenir une équation différentielle (solution $f : x\longmapsto a*x\ln(x)$)

3. Pour $\frac{5}{2}$: f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, f(xy) = f(x)f(y)$ (idem avec f continue)
   Principe : Dans les deux cas, on commence par remarquer que $f(1) = f(1)^2$ et $f(-1)^2 = f(1)$ et on distingue donc trois cas
   $$\begin{cases} f(1)=0 & \text{Alors } f \text{ est nulle}\\ f(1)=1 \text{ et } f(-1)=1 & \text{Alors } f \text{ est paire}\\ f(1)=1 \text{ et } f(-1)=-1 & \text{Alors } f \text{ est impaire}\end{cases}$$
   - Si f est dérivable, équation différentielle, puis recollement par parité ou imparité
   - Si f continue, on étudie la fonction sur $\mathbb{R}_+^*$ et on considère $g = f\circ\exp$ et on se ramène au 1. b). On recolle ensuite par parité.

4. f est dérivable en 0 et $a\neq 1, a\neq 0$. $\forall x\in f(ax) = af(x)$
   Principe : On définit $g : \begin{array}{c}\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}\\ x\longmapsto\frac{f(x)}{x}\end{array}$ et $g(0) = f'(0)$.
   Si $|a|>1, \forall x\in\mathbb{R}$ on définit U_n par $\mathrm{U}_0 = x$ et $\mathrm{U}_{n+1} = \frac{\mathrm{U}_n}{a}$. Alors $\forall n\in\mathbb{N}, g(x) = g(\mathrm{U}_n)$.
   La continuité de g donne alors $\forall x\in\mathbb{R}, g(x) = g(0)$. Utiliser $\mathrm{U}_{n+1} = a\mathrm{U}_n$ si $|a|<1$

5. f est continue sur $\mathbb{R}$ et :
   a) $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x+y)-f(x-y) = 2f(x)f(y)$
   b) $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)f(y)$

   Principe :
   a) $f(0) = 0$ et $f(x)-f(-x) = 0$. On en déduit que $f(x) = 2*f(\frac{x}{2})^2\geq 0$ et $-f(x) = 2*f(\frac{x}{2})^2\geq 0$. Donc $f(x) = 0$
   b) Par intégration, montrer que $f\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, puis équation différentielle d'ordre 2 (dériver deux fois par rapport à x et fixer $y=0$)

6. f est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, (x-y)f'(2x-y) = f(x)-f(y)$
   Principe : $x=0$ et $y=0$. on obtient deux équations. on finit en faisant $x=y$ entre ces deux équations. On obtient $f'(2x) = f'(-x)$, on conclut par continuité de f'

7. f est continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in, x\int_0^x f^2(t)\,dt = [\int_0^x f(t)\,dt]^2$
   Principe : $x = \int_0^x 1^2\,dt$, et cas d'égalité de Cauchy-Schwartz

8. f est continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$
Principe : On peut poser $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$ ou $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et équation différentielle ($\frac{\partial}{\partial y}$ et $y=0$)

9. f est continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x) - f(y) = \int_{x+2y}^{y+2x} f(t)\,dt$
Principe : $y=0 \Rightarrow f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Ensuite, $\frac{\partial}{\partial x}$ et $x=y \Rightarrow f(3x) = f'(x)$. Enfin $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ et $x=0 \Rightarrow f'(2x) = f'(x)$
On peut conclure par continuité de f'

10. Pour $\frac{5}{2}$: f est continue sur $[0,1]$ et $\int_0^1 f(t)\,dt = 1/3 + \int_0^1 [f(t^2)]^2\,dt$
Principe : $1/3 = \int_0^1 t^2\,dt$, on obtient après changement de variable ($t=u^2$) $\int_0^1 (f(t^2)-t)^2\,dt = 0$

11. f est continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f(ax+b) = f(x)$ où a et b sont deux réels fixés tels ques $|a| \neq 1$
Principe : Si $|a|>1$, on pose pour x quelconque $\begin{cases} U_0 = x \\ U_{n+1} = \frac{U_n - b}{a} \end{cases}$. Alors $f(U_n) = f(U_{n+1})$, d'où f = cte par continuité
Si $|a|<1$, on utilise $\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} U_0 = x \\ U_{n+1} = aU_n + b \end{cases}$

12. f est deux fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ er $\forall x \in \mathbb{R}^2, f(x+1)f(x-y) = f(x)^2 - f(y)^2$
Principe : $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$. On obtient $f"(x+y)f(x-y) - f(x+y)f"(x-y) = 0$.
Si f est non nulle, $\exists a \in \mathbb{R} / f(a) \neq 0$. D'où $\forall x \in \mathbb{R} f"(x) = \frac{f"(a)}{f(a)} f(x)$