Familles libres, familles liées

Exercice 1. Soit v un endomorphisme d'un espace vectoriel E, tel que $\forall x \in E, \exists \lambda \in \mathbb{R} : v(x) = \lambda x$
Monter que : $\exists \lambda \in \mathbb{R} / v = \lambda Id_E$

Principe : $\forall (x, y) \in E^2, \begin{cases} (x, y) \text{ libre} \Rightarrow \text{ utiliser } v(x+y) \\ (x, y) \text{ liée} \Rightarrow \text{ utiliser } x = \alpha y \end{cases}$ Ceci établit l'unicité de λ

Exercice 2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et v un endomorphisme d'un espace vectoriel E qui commute avec toutes les projections vectorielles.
Montrer que : $\exists \lambda \in \mathbb{R} / v = \lambda Id_E$

Principe : $\forall x \in E$, soit p un projecteur tel que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(x)$. Alors $p(v(x)) = v(x) \Rightarrow \forall x \in E, \exists \lambda \in \mathbb{R} / v(x) = \lambda x$

Bases

Exercice 1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n > 1$ et F un sous-espace vectoriem de E autre que E et 0
Montrer que F admet une infinité de supplémentaires.

Principe : On note p la dim de F . Le théorème de la base incomplète donne un premier supplémentaire $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(e_{p+1}, ..., e_n)$. On note alors $\forall \lambda \in \mathbb{K} G_\lambda = \mathrm{Vect}_K(e_{p+1} + \lambda e_1, ..., e_n)$ alors $G_\lambda \neq G_\mu$ si $\lambda \neq \mu$

Exercice 2. Démontrer le théorème du rang

Principe : Soit $H \subset E / H \bigoplus \mathrm{Ker}(f) = E$. Montrer que $h : \begin{array}{l} H \rightarrow \mathrm{Im}(f) \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$ est injective et surjective.

Exercice 3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. on considère f un endomorphisme de E qui vérifie $\exists x_0 \in E / [f(x_0, f(x_0^2, ..., f(x_0^n]$ soit une base de E
Montrer que f est un automorphisme de E. Étudier la réciproque.

Principe : $E \subset \mathrm{Im}(f)$ donc f est surjective. Réciproque fausse : cas de Id_E

Exercice 4. Démontrer que si A et B sont deux sous espaces vectoriels de E, de dimension finie, alors $\dim A + \dim B = \dim(A + B) + \dim A \bigcap B$

Principe : Considérer $f : \begin{array}{l} A \times B \rightarrow A + B \\ (a, b) \longmapsto a + b \end{array}$ et appliquer le théorème du rang.
f est surjective et $\mathrm{Ker}(f)$ est isomorphe à $A \bigcap B$ car $\mathrm{Ker}(f) = \{(x, -x), x \in A \bigcap B\}$

Exercice 5. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Montrer que :
$[\exists f \in \mathscr{L}(E) / \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)] \Leftrightarrow [n \text{ est pari}]$

Principe : $\Rightarrow$ Théorème du rang, $\Leftarrow$ Considérer l'endomorphisme associé à $\mathscr{M}\boldsymbol{at}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I_{\frac{n}{2}} & 0 \end{bmatrix}$

Exercice 6. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. on considère f un endomorphisme de E tel que $f^n = 0 \text{et} f^{n-1} \neq 0$

a) Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f est M :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f est ${}^t M$

Principe : $\forall x \in E \backslash \mathrm{Ker}(f^{n-1}, (x, f(x), ..., f^k(x))$ est libre si $k \leq n-1$

Exercice 7. Soit A une matrice de rang r à n lignes et p colonnes. Montrer qu'il existe deux matrices inversibles P et Q telles que $A = PJ_rQ$ où J_r est la matrice $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Principe :
$\Leftarrow$ invarriance du rang par composition d'isomorphisme

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{cc} \overset{\text{antécédent de } \mathscr{B}}{\longleftrightarrow} & \overset{\text{base de Ker}(f)}{\longleftrightarrow} \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \updownarrow \text{ Base de Im}(f) = \mathbf{B} \\ \updownarrow \text{ Théorème de la Base Incomplète} \end{array}$$

Rang

Exercice 1. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. On considère f et g deux morphismes de E vers F.
Montrer que $|rg(f) - rg(g)| \leq rg(f+g) \leq rg(f) + rg(g)$

Principe :
Inégalité de droite : $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$ puis $\dim(A+B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \bigcap B)$
Inégalité de gauche : $f = (f+g) - g$ et appliquer la première inégalité

Exercice 2. Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On considère $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$
Montrer que $g \circ f = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$

Principe : Pas d'astuce... partir des définitions

Exercice 3. Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On cosidère $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$
Montrer que