Compte rendu d'oral : PC*

Nom du candidat : Yann Krysinski

Date de l'épreuve : 23/06/2004

École : X/ESPCI		
Durée de préparation : 0	Durée de passage : 50 min	Examinateur : JJ. Prat

Sujet :

$f \in \mathscr{C}^0\left(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}\right), \displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ finie

On pose $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \displaystyle\int_0^x \left(\frac{\mathrm{F}(s)}{s}\right)^2 \mathrm{d}s \leq 2\int_0^x \frac{f(s)\mathrm{F}(s)}{s}\mathrm{d}s$
2. En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{F}(s)}{s}\right)^2 \leq 4\int_0^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$

Question supplémentaire (une fois l'exo terminé et une fois tous les résultats intermédiaires effacés — j'avais bien pris la peine de demander si je pouvais effacer, croyant l'exo terminé) : peut-on avoir l'égalité ?

Solution proposée par le candidat :

1. IPP
2. ICS
   À noter quelques subtilités sur la notion d'intégrale convergente / fonction intégrable qui apparaissaient dans l'exo.
   Dans l'IPP à faire entre ε et x, il fallait montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{F}(x)}{x^2} = 0$ (à faire avec ICS bien appliquée)
3. Cas d'égalité : se ramener au cas d'égalité avec ICS mais avec un nouveau produit scalaire : $\displaystyle\int_0^{+\infty} fg$
   Encore fallait-il se souvenir à quelles fonctions j'avais appliqué l'ICS…
   Ayant effacé le tableau faute de place et ne m'en souvenant pas (car au milieu de calculs laborieux et de questions annexes), l'exminateur m'a obligé à refaire toute la démo pour le retrouver… je l'ai refaite… avec le sourire…