Compte rendu d'oral : PC*

Nom du candidat : Vincent Tejedor

Date de l'épreuve : 18/06/2004

École : X/ESPCI					
Durée de préparation :	0	Durée de passage :	50 min	Examinateur :	S. Attal

Sujet :

I. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall k \in \mathbb{N}, A^k$ bornée

$B_p = \dfrac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} A^k$

- Montrer que B_p admet une valeur d'adhérence notée B
- Montrer que $B^2 = B$
- Montrer que $\begin{array}{l}\operatorname{Im}(A - Id) = \operatorname{Ker}(B)\\ \operatorname{Ker}(A - Id) = \operatorname{Im}(B)\end{array}$
- Montrer que $\lim\limits_{p\to+\infty} B_p = B$

II. $S = \left\{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,/\, \forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, x \mapsto x^n f^{(n)}(x) \text{ bornée sur } \mathbb{R}\right\}$

$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ et $G(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f'(x+n)$

- Exemples de fonctions dans S
- Montrer que F existe
- Montrer que F converge normalement sur tout compact
- Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

Solution utilisée :

- Valeur d'adhérence : $|||B_p||| \leq \dfrac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} |||A^k||| \leq M$ car $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ bornée
- $B^2 = B$: indication $BA = B$ (facile) puis $B \times BP = B$ plus limite et continuité de $M \mapsto BM$
- B projecteur et $\begin{array}{ll}\operatorname{Im}(A - Id) \subset \operatorname{Ker}(B) & X = AY - Y \Rightarrow BX = 0\\ \operatorname{Ker}(A - Id) \subset \operatorname{Im}(B) & B_p X = X \ldots\end{array}$
  + théorème du rang et dimension
- Si deux valeurs d'adhérences, ce sont des projecteurs de même noyau et même image donc la valeur est unique. D'où $\lim\limits_{p\to+\infty} B_p = B$
- $x \mapsto e^{-x^2} \in S$
- $x^2 f(x)$ bornée $\Rightarrow f(x+n) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$
  Idem avec $\|f\|_\infty$

Questions de cours :

- Définition d'un compact et quelques exemples (avant l'exo 1)
- Convergence et série de Fourier (avant l'exo 2)