Compte rendu d'oral : PC*

Nom du candidat : Fanny Henriet

Date de l'épreuve : 30/06/2004

École : X/ESPCI					
Durée de préparation :	0	Durée de passage :	50 min	Examinateur :	JJ. Risler

Sujet :

I. $y^{(n)}(t)+c_1(t)y^{(n-1)}(t)+\ldots+c_n(t)y(t)=0$ avec $\forall i \in [\![1,n]\!], c_i \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I},\mathbb{R})$
la longueur de l'intervalle I est l.
$|c_i(t)| < c_i$ (avec c_i une constante)
$\sum_{i=1}^{n} c_i l^i < 1$
Montrer que f a au plus n zéros
Montrer qu'il existe une solution avec $n-1$ zéros

II. Savez-vous ce qu'est une matrice nilpotente ? Que peut-on dire des valeurs propres d'une telle matrice. Réciproque : si 0 est l'unique valeur propre, montrer que M est nilpotente.
On considère A et B telles que $(\mathrm{A}+\lambda_i\mathrm{B})^n=0$ pour $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$
Montrer : $\begin{cases}\mathrm{A}^n=0\\ \mathrm{B}^n=0\end{cases}$

Solution utilisée :

I.
- Par l'absurde : si $n+1$ zéros
  Théorème de Rolle : $\exists\alpha\in\mathrm{I}, f^{(n)}(\alpha)=0$
  $f^{(n-1)}(x)=\int_\alpha^x f^{(n)}(t)\,dt$ puis majorations
  On en déduit $|f^{(i)}(x)|\le\|f_n\|_\infty l^i$ d'où $\sum_{i=1}^{n} c_i(t)y^{n-i}(t)\le\|f^{(n)}\|_\infty\underbrace{\sum_{i=1}^{n} c_i l^i}_{<1}$
  Donc $\forall t\in\mathrm{I}, f^{(n)}(t)<\|f^{(n)}\|_\infty$ (contradiction car I est un compact)
- $\dim\mathscr{S}=n$
  $$\varphi:\begin{array}{ccl}\mathscr{S} & \to & \mathbb{R}^{n-1}\\ f & \mapsto & \begin{pmatrix} f^{(n)}(x_1)+c_1(x_1)f^{(n-1)}(x_1)+\ldots+c_{n-1}(x_1)f'(x_1)\\ \vdots\\ f^{(n)}(x_{n-1})+\ldots+c_{n-1}(x_{n-1})f'(x_{n-1})\end{pmatrix}\end{array}$$
  Théorème du rang : $\dim\mathrm{Im}(\varphi)\le n-1\Rightarrow\dim\mathrm{Ker}(\varphi)\ge 1$
  Donc $\exists f_{\mathrm{sol}}\in\mathscr{S}, f_{\mathrm{sol}}(x_1)=\ldots=f_{\mathrm{sol}}(x_{n-1})=0$

II.
- $\dim\mathrm{Ker}\,\mathrm{M}^p>\dim\mathrm{Ker}\,\mathrm{M}^{p+1}$
- $(\mathrm{A}+x\mathrm{B})^n$ + polynômes des composantes

Commentaire :

Examinateur très gentil.