Compte rendu d'oral : PC*

Nom du candidat : Julien SALORT

Date de l'épreuve : 17/06/2004

École : X/ESPCI					
Durée de préparation :	0	Durée de passage :	50 min	Examinateur :	S. ATTAL

Sujet :

I. Question de cours : critère de CAUCHY, règle de D'ALEMBERT

II. Nature des séries de terme général :

- $u_n = \dfrac{1}{\ln(\operatorname{ch} n)}$
- $v_n = n^{n^\alpha} - 1$
- $w_n = \arccos\left(\dfrac{1}{n}\right) - \arccos\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

III. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A^3 - 3A + 4I_n = 0$. Déterminer le signe du déterminant de A

IV. Question de cours : que savez-vous du polynôme caractéristique ?

Indications données par l'examinateur :

Inutile de chercher les racines évidentes de $P(X) = X^3 - 3X + 4$. Faites seulement une étude simple pour connaître le nombre de racines.
Vous pouvez utiliser une propriété du polynôme minimal. Je lui fais alors remarquer que le polynôme minimal n'est pas explicitement au programme. Il vérifie dans le texte qu'il a sous les yeux, acquiesce et me dit d'oublier la remarque.

Solution utilisée :

Je ne me souvenais plus de ce qu'était le critère de CAUCHY. Il m'a alors demandé si je savais ce qu'était une *suite* de CAUCHY. Je lui ai alors écrit : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p > N, \forall q > N, |u_p - u_q| < \varepsilon$.
Pour les natures des séries, il suffit de faire des développements limités. (il y a une microdiscussion pour v_n). Je ne me souvenais plus du développement limité d'arcosinus, je l'ai donc redémontré en intégrant le développement limité de $\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ (l'examinateur m'a d'ailleurs fait remarqué que j'avais oublié le signe moins — honte sur moi). Signe de w_n ? On a $\dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n^2}$ et arccosinus qui est strictement décroissante donc w_n est toujours négative.
Le polynôme a une racine réelle dans $]-\infty, -1[$ et deux racines complexes conjuguées. Notons α, z et $\overline{z}$ les racines. A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ car P est un polynôme annulateur scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$. Comme $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, son déterminant doit être réel donc $m(z) = m(\overline{z})$. En outre, A est diagonale donc la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace : $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & (0) & & \\ & & \alpha & & & & & & \\ & & & z & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & z & & & \\ & & & & & & \overline{z} & & \\ & & (0) & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \overline{z} \end{pmatrix}$$

D'où $m(\alpha) + 2m(z) = n$ et

$$\det A = \alpha^{n-2m(z)} \cdot |z|^{2m(z)}$$

donc $\det A$ est positif si n est pair et négatif si n est impair.