Compte rendu d'oral : PC*

Nom du candidat : Julien Salort

Date de l'épreuve : 01/07/2004

École : ENS

Durée de préparation : 0 Durée de passage : 1 h

Sujet :

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\varphi'' = -\varphi + \varphi^3$. On note $f(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{x^4}{4}$

1. Que peut-on dire de $f(\varphi, \varphi')$?
2. Tracer les lignes de niveaux de f
3. En déduire l'allure des solutions de l'équation différentielle $\varphi'' = -\varphi + \varphi^3$.

Solution proposée par le candidat :

On voit rapidement que $f(\varphi, \varphi')$ est une fonction constante. Pour les lignes de niveaux, j'ai eu des scrupules au départ à faire $y = \pm\sqrt{\frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} + 2K}$ car je ne trouvais pas cela très élégant mais l'examinateur m'a dit que c'était bien ce qu'il fallait faire. Il y a un certain nombre de cas à traiter. Cependant, il fallait tout faire sans calcul (pas question de calculer la dérivée et de dresser le tableau de variation), en regardant seulement les asymptotes et les tangentes, en raisonnant sur les fonctions (composées de fonctions croissantes ou décroissantes). Pour les solutions de l'équation différentielle, il m'a juste demandé de dessiner qualitativement l'allure des solutions (on connaît les couples $\varphi(t), \varphi'(t)$ — tout est défini à des constantes près), il fallait parfois utiliser les hypothèses pour éliminer certaines solutions lorsqu'il y avait plusieurs possibilités.