Compte rendu d'oral : PC*

Nom du candidat : Vincent TEJEDOR

Date de l'épreuve : 24/06/2004

École : Centrale	
Durée de préparation : 30 min	Durée de passage : 30 min

Sujet :

Exercice 1. Étudier la nature de $u_n = \dfrac{1}{n^\beta}\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p^\alpha$ et de $v_n = \dfrac{1}{n^\beta}\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p^\alpha \ln(p)$ avec $\beta > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

Exercice 2. $(\alpha_n) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^{\mathbb{N}}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

f fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a_n f(t)\mathrm{d}t}{a_n^2+t^2}$

Indications données par l'examinateur :

Pour l'exercice 2 : changement de variable (après deux tentatives un peu compliquées à son goût)

Solutions utilisées :

Exercice 1.

- Étudier $\alpha > -1$
  $u_n = \dfrac{1}{n^{\beta-(\alpha+1)}} \times \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{p}{n}\right)^\alpha$ et RIEMANN $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{p}{n}\right)^\alpha = \int_0^1 t^\alpha \mathrm{d}t + o(1)$
- $\alpha < -1$
  $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p^\alpha$ CV donc bornée
- $\alpha = -1$: $\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p} \sim \ln(n)$
- idem pour v_n

Exercice 2. Poser $u = \dfrac{t}{a_n}$ et CV dominée

Commentaires du candidat :

Maple n'a servi à rien. Seul l'exercice 1 était à préparer.

Question de cours éventuelle :

Montrer que $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{p=1}^{n} f\left(\frac{p}{n}\right) \underset{+\infty}{=} \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t + o(1)$ avec $\begin{cases} f \notin \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \\ f \in \mathscr{L}^1(]0,1],\mathbb{R}) \end{cases}$