Compte rendu d'oral : PC*

Nom du candidat : Pierre-Thomas Brun

Date de l'épreuve : 28/06/2004

| | | | |
|---|---|---|---|
| École : Centrale | | | |
| Durée de préparation : | 30 min | Durée de passage : | 30 min |

**Sujet** :

Ex 1 :

- $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $AB = BA$
  Montrer que $\det\left(A^2 + B^2\right) \geq 0$
- Est-ce que ça marche si elles ne commutent plus

Ex 2 :

- Esp. normé. $\|x\| + \|y\| \leq 2\max\left(\|x+y\|, \|x-y\|\right)$
  Cas dégalité ?
- Esp. euclidien. $\|x\| + \|y\| \leq \sqrt{2}\max\left(\|x+y\|, \|x-y\|\right)$
  Peut-on avoir la même chose avec $a < \sqrt{2}$ ?

**Aide de l'examinateur** :

Trouver une relation qui lie tous les termes de l'inégalité.

**Solution proposée par le candidat** :

Ex 1 : $(A + iB)(A - iB) = A^2 + B^2$ d'où $\det(A^2 + B^2) = \det(A + iB)\det(A - iB)$

$$\det(A - iB) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\left(A_{\sigma(1),1} - iB_{\sigma(1),1}\right)\dots\left(A_{\sigma(n),n} - iB_{\sigma(n),n}\right)$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\left(\overline{A_{\sigma(1),1} + iB_{\sigma(1),1}}\right)\dots\left(\overline{A_{\sigma(n),n} + iB_{\sigma(n),n}}\right) = \overline{\det(A + iB)}$$

Mettre des O et se laisser un ou deux degrés de liberté puis voir.

Ex 2 :

- $x = x + y - y$ puis double feinte de l'ours
- $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\left(x|y\right)\dots$
  $\|x-y\|^2 = \dots$

**Remarque** :

Pour cet oral, mieux valait avoir de la chance.