Compte rendu d'oral : PC*

Nom du candidat : Yann Krysinski

Date de l'épreuve : 16/07/2004

| École : Centrale (Maths 1) | | | |
|---|---|---|---|
| Durée de préparation : | 30 min | Durée de passage : | 30 min |

**Sujet** :

1. $\begin{cases} u_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n - w_n \end{cases}$

   Conditions sur $u_0$, $v_0$, $w_0$ pour que $u_n$, $v_n$ et $w_n$ converge ?

2. Soit $\mathbb{Z}[j] = \{x + jy, x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\}$
   a. Montrer que $\mathbb{Z}[j]$ est un sous anneau de $\mathbb{C}$
   b. Montrer que $u$ est inversible dans $\mathbb{Z}[j]$ si et seulement si $|u| = 1$
   c. Montrer que l'ensemble des éléments inversibles est un sous-groupe multiplicatif

**Solution utilisée** :

1. $X_n = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix}$ et $X_{n+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} X_n = AX_n$

   - Trouver les valeurs propres : 1 évidente + tr et det pour les deux autres
   - Diagonaliser dans une BON : $A = PD^tP$
     $\underbrace{{}^tPX_{n+1}}_{Y_{n+1}} = D\,\underbrace{{}^tPX_n}_{Y_n} \Rightarrow Y_n = D^nY_0\ldots$

2. a. facile (penser à $1 + j + j^2 = 0$)
   b. $\forall u \in \mathbb{Z}[j], |u|^2 = x^2 + y^2 - xy$
      - $u$ inversible si et seulement si $\exists (x', y'), xx' - yy' + j(xy' + x'y - yy') = 1$
        $(1, j)$ base de $\mathbb{C} \Rightarrow \begin{cases} xx' - yy' = 1 \\ xy' + x'y - yy' = 0 \end{cases}$
        Le déterminant de ce système est justement $x^2 + y^2 - xy = 1$
      - Réciproque : $|u| = 1$
        or $\left.\begin{array}{r} uu' = 1 \Rightarrow |u|^2|u'|^2 = 1 \\ |u|^2 = x^2 + y^2 - xy \Rightarrow |u|^2 \in \mathbb{Z} \text{ et } |u'|^2 \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} |u| = 1 \\ |u'| = 1 \end{cases}$

**Commentaire du candidat** :

Examinateur très sympathique, encourageant