Compte rendu d'oral : PC*

Nom du candidat : Fanny Henriet

Date de l'épreuve : 15/07/2004

École : Centrale	
Durée de préparation : 30 min	Durée de passage : 30 min

Sujet :

$$\begin{cases} (A_n) & y'' - xy' + ny = 0 \\ (B_n) & y'' + xy' + (n+1)y = 0 \end{cases}$$

I. Montrer que φ est solution de A_n ssi $x \mapsto \varphi(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ est solution de B_n

II. On pose $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Montrer que pour tout n, $f^{(n)}$ est solution de B_n

III. $P_n(x) = f^{(n)}(x)e^{\frac{x^2}{2}}$. Calculer P_0, P_1, P_2
Montrer que $P'_{n+1} = -(n+1)P_n$, en déduire que P_n est un polynôme de degré n

IV. Montrer que pour tout polynôme P, P_f est intégrable sur $\mathbb{R}$
Montrer que $\int_{\mathbb{R}} P(x)\left[Q''(x) - xQ'(x)\right] f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} Q(x)\left[P''(x) - xP'(x)\right] f(x)dx$

V. En déduire que $\forall m, n \in \mathbb{N}^2, m \neq n, \int_{\mathbb{R}} P_n(x)P_m(x)e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 0$

Solution utilisée :

I. À faire

II. Récurrence

III. Dériver P_{n+1} et utiliser f solution de B_n

IV. $\left[Q''(x) - xQ'(x)\right] f(x) = (Q'f)'(x)$ + IPP entre $-A$ et A
(P et Q jouent des rôles symétriques)

V. P_n solution de A_n / P_m solution de A_m + question IV.