Compte rendu d'oral : PC*

Nom du candidat : Julien Salort

Date de l'épreuve : 13/07/2004

École : Centrale	
Durée de préparation : 30 min	Durée de passage : 30 min

Sujet :

1. Soit $\mathbb{K} = \left\{a + b\sqrt{2}, (a,b) \in \mathbb{Q}^2\right\}$. Montrer que $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$. Est-ce qu'il peut exister un isomorphisme de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{C}$?
2. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $u^3 = \mathrm{I}d$. On note $v = u - \mathrm{I}d$
   a. Montrer que $u \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$
   b. Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\, v \oplus \mathrm{Im}\, v$
   c. Montrer que $\mathrm{Im}\, v = \mathrm{Ker}(u^2 + u + 1)$ (on pourra utiliser la division euclidienne de $\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1$ par $\mathrm{X} - 1$)
   d. Montrer que $\mathrm{Im}\, v$ est stable par u. En déduire que $\mathrm{rg}\, v$ est pair.

Solution proposée par le candidat :

Je ne suis pas sûr d'avoir utilisé la bonne caractérisation pour sous-corps. J'ai dit $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{K} \neq \emptyset$ car $0 \in \mathbb{K}$, $\mathbb{K}$ stable pour $+$, $\mathbb{K}$ stable pour $\times$, tous les éléments (sauf 0) sont inversibles.
Pour l'isomorphisme, je n'avais pas réalisé que la réponse était non. J'ai dit oui. Il m'a laissé donner mon exemple puis m'a fait remarqué que c'était faux. Il a attendu quelques secondes puis a dit : « Bon... On passe à l'autre exo. ».
J'ai dit $u^2 \circ u = u \circ u^2 = \mathrm{I}d \Rightarrow u^{-1} = u^2$. J'ai montré une inclusion et que l'intersection était vide. Pour le reste, j'ai été très pataud (décidément, Centrale ne sera pas une grosse réussite). Il y avait d'autres questions que je n'ai pas eu le temps de faire.